
И. Ф. Шарыгин
Похищение «черного квадрата»,
или
Новые уроки дедушки Гаврилы
·РЕЧЬ·

И. Ф. Шарыгин

Похищение «Черного квадрата», или Новые уроки дедушки Гаврилы

Рисунки Т. В. Леонтьевой

РЕЧЬ

Санкт-Петербург — Москва
2019

И. Ф. Шарыгин

Рисунки Т. В. Леонтьевой

РЕЧЬ
Санкт-Петербург — Москва
2019

УДК 51-8
ББК 22.1
Ш26

Шарыгин И. Ф.

Ш26 Похищение «Черного квадрата», или Новые уроки дедушки Гаврилы / И. Ф. Шарыгин ; под ред. Т. Г. Шарыгиной ; худож. Т. В. Леонтьева. — СПб. ; М. : Речь, 2019. — 208 с. : ил.

ISBN 978-5-9268-3020-7

Федя окончил шестой класс и вновь едет к дедушке Гавриле в Квашино. На этот раз не один, а со школьными товарищами. Дедушка открывает в деревне летний математический лагерь для самых любознательных! Ребят ждут новые каверзные вопросы, непростые задачи, математические парадоксы и фокусы. А также неожиданные приключения! Школьникам предстоит сразиться в математическом поединке с загадочным похитителем «Черного квадрата» — любимой дедушкиной картины.

Сборник включает в себя 200 задач для внеклассного изучения. Публикуется впервые и проиллюстрирован графикой Татьяны Леонтьевой. Книга является продолжением задачника «Уроки дедушки Гаврилы, или Развивающие каникулы». Адресован ученикам средних и старших классов.

Для среднего и старшего школьного возраста

Игорь Федорович Шарыгин

ПОХИЩЕНИЕ «ЧЕРНОГО КВАДРАТА», ИЛИ НОВЫЕ УРОКИ ДЕДУШКИ ГАВРИЛЫ

Художник Татьяна Васильевна Леонтьева

Подписано в печать 08.04.2019. Формат 70 × 100 $^1/_{16}$.
Печ. л. 13. Тираж 4000 экз. Заказ № 3370.

ООО «Издательство „Речь“», 199178, Санкт-Петербург, а/я 96
Тел.: (812) 323-90-63, rech-edit@mail.ru, www.rech-deti.ru
Тел. московского представительства: (495) 621-55-97

По всем вопросам, связанным с приобретением книг издательства, обращаться в ТД «Лабиринт»
Тел.: (495) 780-00-98, www.labirint.org
Заказ книг в интернет-магазине www.labirint.ru

Отпечатано в филиале
«Тверской полиграфический комбинат детской литературы»
ОАО «Издательство „Высшая школа“»
Российская Федерация, 170040, Тверь, проспект 50 лет Октября, д. 46
Тел.: 7(4822) 44-61-51. Факс: 7(4822) 44-61-51

Глава 1

ВИЗИТ ДЕДУШКИ

К сожалению, вновь попасть в Квашино Феде удалось только через два года. Дело в том, что ученики дедушки, заботясь о его здоровье, достали путевку и просто заставили его отдохнуть и полечиться в очень хорошем санатории. Дедушке пришлось подчиниться, и все следующее лето он провел на море.

Итак, прошло два года и Федя снова едет в Квашино. Просто Квашино...

Но вернемся немного назад и расскажем о некоторых важных событиях, случившихся незадолго до упомянутого отъезда. А вернее, об одном событии: дедушка приезжал в Москву.

У дедушки Гаврилы было сразу несколько причин и один повод, чтобы посетить Москву. Но поскольку отделить причины от повода не так-то просто, не будем их различать. Среди причин были и хорошие, и плохие, и ни те, ни другие. Начнем, как и положено, с хороших.

Во время отдыха и лечения в санатории дедушка много думал и *загорелся идеей* организовать в Квашине летний математический лагерь для школьников.

Он посоветовался по этому поводу со многими *квашинцами* и получил (а лучше *встретил*) поддержку. Директор местной кондитерской фабрики, той самой, что выпускала конфеты «Гипотенуза», обещал дать деньги и помочь вести бухгалтерию. Ведь деньги, как известно, *любят счет*, а дедушка, несмотря на то, что он также любил счет и умел считать, вовсе не был уверен, что умеет считать деньги. Вернее, он все же умел считать и деньги, но не так, как положено считать деньги.

Здесь автор совсем запутался, пытаясь объяснить, что уметь считать вообще и уметь считать деньги — это вовсе не одно и то же. Он знает много людей, которые не умеют считать, тем не менее умеют считать деньги. И наоборот. Автор считает также, что... Впрочем, все это к делу не относится. Итак, дедушка поехал в Москву, прежде всего чтобы обсудить со знающими людьми, как им (жителям Квашина) организовать летний математический лагерь для школьников. А здесь сразу возникала целая куча проблем и вопросов, с которыми дедушка никогда в жизни не сталкивался.

Не знаю, можно ли отнести к числу причин приезда дедушки просто желание встретиться со старыми друзьями и учениками. Побродить по знакомым местам. Пополнить коллекцию своих задач. Но в любом случае — эта цель приятная, а причина хорошая.

Кроме того, до дедушки дошли слухи о том, что в России проводится реформа или же модернизация (в переводе на русский это означает *осовременивание,* поскольку «модерн» — значит «современный») школьного образования. Дедушка не без опасения относился ко всяким модным штучкам. Он полагал, что сначала надо семь раз отмерить и затем постараться не резать. Особенно когда речь идет об образовании. Здесь он был, можно сказать, *консерватором* (однако *консервированным* продуктам *предпочитал* свежие). Но слухи слухами, а узнать все *из первых рук,* то есть в Москве, не помешало бы. И какой окажется эта причина — хорошей или плохой, — заранее понять было невозможно.

Здесь, к сожалению, придется рассказать и о некоторых не очень приятных событиях, произошедших в Квашине, которые также вынуждали дедушку посетить Москву. В Квашине появились бандиты. К счастью, пока еще ничего серьезного не случилось. Но в ближайшем будущем могло произойти. Своей первой жертвой они избрали директора кондитерской фабрики. Об этом директор сам рассказал дедушке. К нему явились подозрительные личности и потребовали крупную сумму денег. Если он откажется платить, фабрику ждали большие неприятности (не будем перечислять их, чтобы не пугать читателя).

Другая неприятность была связана со знаменитым озером и окружающим его лесом. Появился богатый человек, который объявил себя хозяином и озера, и леса. Он утверждал, что купил и то и другое, хотя никто из квашинцев не мог понять, как он купил озеро и лес, у кого и сколько и кому заплатил. Этот человек собирался разделить лес, окружающий озеро, на отдельные участки, построить на этих участках коттеджи, продать эти участки с коттеджами *очень* богатым людям и заработать на этом *очень* большие деньги. Жители Квашина написали большое письмо на имя президента. И дедушка должен был доставить это письмо по адресу. Письмо было очень важным, и не хотелось отправлять его обычной или даже заказной почтой.

Приехал дедушка весной. Федя встретил его на вокзале. Он был свободен, в школе начались каникулы. До дома от вокзала можно было доехать за час. По московским меркам это совсем недолго. Сначала на метро с одной пересадкой. Затем несколько остановок на трамвае.

В трамвае Федя сразу же начал рассказывать дедушке о своей жизни, о родителях и друзьях, о занятиях математикой. Дедушка внимательно слушал, но своими новыми идеями не спешил делиться. Для того чтобы скоротать дорогу, он предложил поиграть в определения. Один называет какое-нибудь слово, а второй старается дать этому слову как можно более точное определение. Между прочим, не всегда определение находится быстро. Попробуйте сами и убедитесь!

Федя легко справился с определениями слов *квадрат*, *трамвай* и *задача*, но задумался над словом *диагноз*. Дедушка тоже задумался и через некоторое время стал рассуждать вслух:

— Диагноз — это оценка, точное определение болезни. Одна из задач врача состоит в том, что он сначала изучает *симптомы* (то есть признаки, внешние проявления болезни) — температуру, пульс, цвет языка и многое другое, а затем ставит диагноз — указывает точное название болезни (грипп, ангина или не дай бог что-то совсем плохое). Между прочим, когда мы определяем вид фигуры — параллелограмм, полукруг и т. д., мы в некотором смысле ставим диагноз на основании каких-то признаков (симптомов). Кстати, ты заметил, что мне пришлось некоторое время подумать, прежде чем я дал объяснение, что означает термин «диагноз»? Я прекрасно понимаю его значение. Но найти нужные слова, дать точное определение, *толкование* слова оказалось не так просто. Посмотри это слово в словаре! Помнится, в позапрошлом году мы с тобой немного поговорили об определениях. Но к этому стоит еще раз вернуться. И начнем мы с задачи, которая на первый взгляд не имеет отношения к математике. Но ты уже знаешь, что к математике имеет отношение все, и даже то, что к ней никакого отношения не имеет.

1. Дайте определение следующим терминам: «стол», «ум», «небо», «честность», «настроение», «справедливость», «покой», «существо», «определение» (ведь это тоже термин). Можете продолжить этот список и даже организовать игру в определения: кто даст лучшее определение предложенному термину. Загляните в толковый (и чем толковее, тем лучше) словарь русского языка.

— Однако я считаю, что если человек плохо объясняет, то это означает, что он плохо и понимает.

В этот момент дедушка и внук вошли в метро. Вместо нескольких минут путь от поезда, на котором приехал дедушка, до метро занял минут 15 (что явно больше, чем *несколько*). Оно и понятно, дедушка не только беседовал с внуком, но и с изумлением смотрел по сторонам. Москва сильно изменилась за время его отсутствия. Но в какую сторону — лучшую или худшую, — понять было трудно.

Небольшая заминка произошла перед эскалатором. Ездить на эскалаторе совсем не трудно, но определенной сноровкой все же надо обладать, а дедушка за годы проживания в Квашине сноровку немного подрастерял. Встав на ступени эскалатора, дедушка задумался, и Федя, на всякий случай, поддержал его, когда надо было сходить.

— Удивительная штука — эскалатор, — вдруг сказал дедушка. — Это же неиссякаемый источник весьма любопытных задач.

2. Наружная часть эскалатора состоит из 132 ступенек. Сколько ступенек насчитает человек, спускающийся по эскалатору со скоростью в 2 раза большей, чем скорость эскалатора?
3. Спускаясь по эскалатору, Петя насчитал 72 ступеньки. А поднимаясь, – 48 ступенек. Сколько ступенек содержит эскалатор, если известно, что поднимается Петя со скоростью в 2 раза меньшей, чем спускается (относительно эскалатора)?

В метро дедушка выглядел уставшим и задумчивым. Возможно, его одолевали разные мысли, связанные с последними событиями в Квашине. Федя тоже молчал и размышлял над задачами, которые услышал от дедушки. Да и разговаривать в метро под грохот поезда не очень удобно.

Когда они вышли из метро, Федя напомнил дедушке, что теперь они должны завернуть за угол, чтобы *сесть на* трамвай (говоря это, Федя вспомнил почему-то, что его мама недавно наконец-то смогла *сесть на* диету, — удивительно, сколько разных значений у одного слова). Вскоре трамвай подошел к нужной остановке. По дороге к дому дедушка спросил у Феди, приходилось ли ему на этом трамвае проехать весь маршрут и сколько это занимает времени. Федя сказал, что приходилось, и не раз. Весь путь от одной конечной остановки до другой занимает примерно 1 час. Тут дедушка вдруг обрадовался и сказал, что у него возникла задача.

4. Ты мог заметить, но, скорее всего, не заметил, что на таблице на трамвайной остановке указан интервал движения: 11 минут. Весь маршрут, как ты мне сказал, занимает 1 час. Предположим, что на конечных остановках трамвай стоит определенное время, но при этом на конечных остановках не бывает более одного трамвая. Спрашивается: сколько трамваев должны обслуживать этот маршрут?

Дедушка вновь замолчал и задумался. Слишком резок был переход от тихого и культурного Квашина к шумной и... Нет, нет... Автор ни в коей мере не хочет сказать, что Москва — город некультурный. Всем известно, что Москва — не только столица России, но и культурный центр. Причем мирового значения. Но понять, что это в самом деле так, трудно после одной поездки на метро и трамвае. Скорее даже наоборот. В результате таких поездок можно получить неверное представление о культуре москвичей.

Что касается Квашина, то здесь, например, просто невозможно, чтобы в общественном транспорте школьник не уступил места пожилому человеку. И неважно, что в Квашине нет общественного транспорта. А вот в Москве...

Чтобы почувствовать культуру москвича, надо побывать у него в гостях, попить чаю на кухне, выслушать его суждения о литературе и науке, о спорте и политике, посмотреть в театре классическую пьесу. Но для этого нужно время.

...Федя разогрел обед, который приготовила мама. Поели вдвоем с дедушкой. Затем дедушка немного отдохнул. Вскоре пришел с работы Федин папа. Дедушка в это время читал, а вернее сказать изучал газеты, которые купил по дороге. Он настолько увлекся какой-то статьей, что, забыв поздороваться, обратился к сыну с восклицанием:

— Ты только послушай! Где же у них логика? Не понимаю.

— Извини, отец! Не до логики — голоден! — ответил Федин папа.

— Это верно, — согласился Гаврила Терентьевич, — на голодный желудок не поразмышляешь. Впрочем, и сытость не способствует работе головы. Трудно работать одновременно и желудком и головой.

Тут дедушка замолчал и вдруг воскликнул:

— Как ты сказал? *«Не до логики — голоден!»* Колоссально! Грандиозно! Это же *палиндром*, то есть *перевертыш.* Или перевертыш, то есть палиндром. Эта фраза одинаково читается с начала и с конца, правда, пробелы между словами надо ставить иначе. У меня есть целая коллекция палиндромов. Вот некоторые из них: «Утро поползло по порту», «Аргентина манит негра», «Торт с кофе — не фокстрот», «Нá в лоб, болван!», «Я несу чушь. Шучу, Сеня!», «Нажал кабан на баклажан». И вот это мне особенно нравится: «Кит на море романтик».

А вот арифметический палиндром:

$$312 \cdot 221 = 68\,952,\ 25\,986 = 122 \cdot 213.$$

Могу предложить на эту тему несколько задач.

5. Замените буквы цифрами, чтобы получились верные равенства:

уз · ел = ле · зу; лезу · в = узел; мот · бук = куб · том

(в каждом равенстве одинаковые буквы обозначают одинаковые цифры, но в разных равенствах одной и той же букве могут соответствовать разные цифры).

В этот момент раздалась красивая мелодия. Дедушка прислушался.

— Моцарт! — обрадовался он. — Шестая симфония!

Это звонил мобильный телефон, находившийся в кармане пиджака Фединого папы.

— Да, кстати, — заметил дедушка. — Что означает *мобильный*, я понимаю. Если мне память не изменяет, это слово переводится как «передвижной». И это соответствует действительности. А что значит *сотовый*? Почему *сотовый*? При чем здесь соты и пчелы?

Все эти вопросы повисли в воздухе. Автор также не знает ответа на эти вопросы. Пока! Но автор надеется, что он скоро сумеет найти ответы и сообщит их читателю. Если, конечно, читатель соблаговолит дочитать до нужного места.

Не станем подробно описывать те несколько дней, а точнее ровно пять дней — это и в самом деле несколько или чуть больше, — которые провел дедушка в Москве. Расскажем лишь о том, что кажется интересным и важным и имеет какое-то отношение к нашей книге.

Три дня дедушка *ходил по инстанциям.* (Автор хорошо знает, что означает слово *станция* или даже *дистанция*, но что значит *инстанция*, автор лишь догадывается. Известно, что *хождение по инстанциям* — нелегкое занятие, которым нередко приходится заниматься простому человеку.) Вывод, который сделал дедушка в результате этих хождений и наблюдений вокруг, состоял в том, что свои проблемы им придется решать самостоятельно. Возможно, чтобы сделать этот вывод, и не следовало покидать Квашино. Но не это стало главным результатом поездки. А главное — дедушка смог решить почти все проблемы, связанные с организацией в Квашине летнего математического лагеря. Он пригласил прочитать лекции в этом лагере знакомых учителей и ученых. И почти все они согласились, причем с радостью. Ну а что касается неприятностей, о которых упоминалось в начале, то дедушка был убежден, что общими усилиями они с ними справятся.

Дедушке удалось навестить одного своего старого друга и *однокашника*. (То есть человека, с которым он ел *одну кашу*. Конечно, не одну лишь, а одну и ту же. То есть из одного котла.) У того тоже был внук, Георгий, и этот внук оканчивал школу и готовился поступать в Московский университет на биологический факультет.

И дедушка не смог *отказать себе в удовольствии* (ну а кто же способен отказать *себе* в удовольствии?) порешать задачки из числа тех, что давались на подготовительном отделении, которое посещал Георгий. Среди этих задач были вполне достойные. И Георгий был несколько удивлен, когда дедушка нашел для некоторых задач очень простые, *элементарные* решения, понятные даже младшеклассникам. Вот несколько задач.

6. Из города A в город B вниз по течению реки одновременно отправились катер и плот. Катер прибыл в B и тут же отправился обратно и встретил плот через 2 часа после выхода из A. Сколько времени понадобилось катеру, чтобы добраться от A до B?

7. Продолжение предыдущей задачи. После встречи с плотом катер прибыл в A, тут же отправился обратно и догнал плот через 2 часа после встречи с ним. Сколько времени надо плоту, чтобы добраться от *A* до *B*?

8. Из точек *A* и *B* навстречу друг другу одновременно выходят два тела. Каждое тело, оказываясь в точке *A* или *B*, меняет направление своего движения на противоположное и с той же скоростью движется в обратном направлении. Тело, вышедшее из *A*, проходит путь от *A* до *B* за 101 секунду, а тело, вышедшее из *B*, проходит этот же путь за 201 секунду. По истечении $2 \cdot 101 \cdot 201$ секунд каждое тело окажется в исходной точке. Сколько раз за это время первое тело обгонит второе?

Следующий день накануне отъезда дедушка провел дома. Он никуда не выходил, читал газеты, смотрел телевизор. И думал...

Когда вечером пришел Федин папа, дедушка сказал:

— Завтра я уезжаю. Но прежде чем проститься, я думаю, нам надо поздороваться. Когда мы встретились, я был так увлечен, что забыл поздороваться. Ну! Здравствуй! — И они крепко обнялись.

И тут дедушка вдруг обратился к сыну с неожиданной просьбой:

— Не могли бы вы выслать мне в Квашино 10 штук мобильных телефонов? Разумеется, подключенных.

Сам дедушка мобильным телефоном не пользовался.

...На этом автор собирался закончить первую главу. Но тут он вспомнил, что среди предложенных задач нет ни одной задачи по геометрии. Это неправильно. Ведь есть дети, которые очень любят геометрию и решают прежде всего геометрические задачи. Нехорошо их обижать. Да и Федя любит геометрию. Поэтому в завершение первой главы — две геометрические задачи.

9. На плоскости отмечено девять точек. Пять — просто точки, а у четырех поставлены крестики (рис. 1). Изобразите пя-

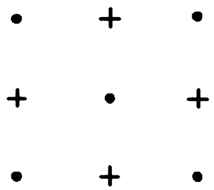


Рис. 1

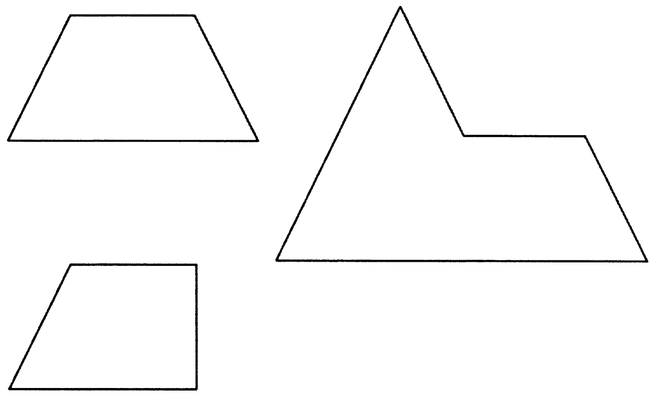


Рис. 2

тиугольник, для которого все точки с крестиком расположены внутри, а все обычные точки – вне. Изобразите также шестиугольник, у которого все пять точек расположены внутри, а все крестики – снаружи.

10. Каждую из изображенных здесь (рис. 2) фигур разрежьте на четыре фигуры такой же формы, но в два раза меньше.

Глава 2

МАТЕМАТИКА В АВТОБУСЕ

Выезжали в Квашино на двух автобусах. В одном ехали ребята постарше, а в другом — соответственно — помладше. Федя ехал в младшей группе. И в этой группе он также был одним из самых младших. Было еще несколько его одноклассников. Все же остальные ребята были старше. Накануне отъезда Федя постригся наголо. Если вы помните, точно так же он поступил, когда впервые поехал в Квашино. Так что можно говорить о возникновении традиции.

К счастью, день выдался не жарким, и дорога не была утомительной. Ехали весело. Впереди сидел студент Арсений, или просто Сеня. В автобусе он был за главного. У него на коленях лежала большая карта, которую он внимательно изучал.

— Пункт назначения находится почти в центре Старорусской области, — с важным видом объяснял Арсений. — Здесь имеются старинные русские города. Областной центр — город Дебрянск. Говорят, что название происходит оттого, что окружают его настоящие *сплошные дебри*. Известны также города Пригорск, Звонгород... — Тут Сеня вдруг воскликнул: — Какое интересное название: Пузырь!

Затем Сеня замолчал и некоторое время что-то измерял на карте: «Вот, кстати, и задача».

11. Расстояние между Пузырем и Дебрянском равно 17 км, а между Пузырем и Пригорском — 11 км. От Звонгорода до Дебрянска 8 км, зато до Пригорска 36 км. Чему равно расстояние между Звонгородом и Пузырем?

Сенину задачу решили довольно быстро. Два мальчика решили ее устно (это были Коля Васильев и новичок в их классе Рамиль Зигангиров), то есть ничего не... Тут автор пытался вставить соответствующее слово, производное от глагола «писать». Но получалось что-то ужасное, вроде «пиша» или того хуже. Похоже, нужной формы глагол «писать» не имеет. Странно!

В пути было намечено сделать одну остановку в городе Верхние Белки (ударение на «е»). В этом городе в местной школе ребят ждал обед. Это тоже сообщил Сеня.

Некоторое время ехали молча. Потом кто-то поинтересовался: сколько километров осталось до Верхних Белок, то есть до обеда? В этот момент автобус как раз проезжал мимо деревни Моховая. На то, что это именно деревня, указывала буква «д.», ведь если бы перед названием стояла буква «с.», то это означало бы «село», хотя понять, чем «деревня» отличается от «села», не так просто. Сеня посмотрел на свою карту и ответил, что расстояние до Верхних Белок ровно в 2 раза больше пройденного расстояния. Судите сами, ответил ли Сеня на поставленный вопрос.

Время в пути летело быстро. Пели песни. Федя очень старался и пел громче всех.

Потом Сеня рассказал о том, как он ездил в Швейцарию по обмену.

12. – Из окна моей комнаты была видна остановка автобуса. В Швейцарии, это всем известно, поезда и автобусы ходят точно по расписанию. Однажды стоял я у окна и наблюдал за автобусами. Каждый автобус стоял на остановке ровно 20 секунд. А вот подходили автобусы к остановке как-то неравномерно. Ровно через 2 минуты после того, как к остановке подъехал один автобус, на ней появился следующий автобус. Зато третий подошел уже через 3 минуты. Короче, интервалы между появлениями автобусов были следующими (начну с первого): 2 минуты, 3 минуты, 4 минуты, 1 минута, 5 минут, снова 1 минута. Тут я задал себе вопрос, вернее два вопроса. Как объяснить такую неравномерность? И чему равен следующий интервал между появлениями автобусов? Могу похвастаться, что я нашел разумное объяснение и успел найти ответ и на второй вопрос до появления на остановке следующего автобуса. Мое предположение подтвердилось.

Ребята внимательно рассматривали листок, на котором Сеня крупными цифрами написал последовательность интервалов между соседними автобусами. Через некоторое время кто-то (не будем уточнять кто) высказал предположение: «Так, наверно...» Догадка оказалась верной.

После этого ребята *наперебой* стали вспоминать интересные задачи, известные им. Но Сеня быстро *остановил* этот *перебой* и *установил порядок*, указав, в каком *порядке* ребята должны выступать. При этом он сказал, что принимаются лишь *автобусные* задачи, то есть задачи, которые можно решить устно во время поездки в автобусе.

Приведем некоторые из этих задач.

13. Имеются 10 квадратов, вырезанных из клетчатой бумаги, с размерами 1×1, 2×2 и т. д. до 10×10. Все квадраты с четным числом клеток окрашены в черный цвет. Сначала на лист бумаги мы кладем самый большой черный квадрат 10×10. Затем в его левом верхнем углу помещаем белый квадрат 9×9. В левом, но уже нижнем углу белого квадрата размещаем черный квадрат 8×8. Затем переходим к правому нижнему углу этого черного квадрата и размещаем там белый квадрат 7×7. Далее в правом верхнем углу кладем черный квадрат 6×6. И так далее. Попробуйте представить и нарисовать картинку, которую мы увидим после того, как положим последний черный квадрат 1×1.

14. Найдите какие-нибудь натуральные числа x, y, z, при которых выполняется равенство $28x + 30y + 31z = 365$.

15. В выражении $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - 8 + 9 - 10$ расставьте скобки так, чтобы его значение было больше 40. (При этом нельзя, расставляя скобки, добавлять новые арифметические действия.)

16. Однажды девочка Маша решила, пересчитывая пальцы одной руки, досчитать до 1000. Она начала с мизинца, пятым был большой. Дойдя до большого пальца, Маша тут же двинулась в обратном направлении. Шестым был указательный. И так далее. Всякий раз, дойдя до большого или мизинца, Маша меняла направления. На каком пальце она окончила счет?

17. В выражении $3\ \ 3\ \ 3 = 10$ расставьте математические знаки так, чтобы получилось верное равенство.

18. Равенство $101 - 102 = 1$ очевидно не верно. Переместите ровно одну цифру, чтобы оно стало верным.

19. Однажды профессор вошел в комнату и увидел, как сын отца профессора играет в шахматы с отцом сына профессора. Объясните, как это могло быть.

20. Квадрат повернули вокруг вершины на 90°, как показано на рис. 3. Покажите, как этот один поворот можно заменить четырьмя поворотами на 90° каждый.

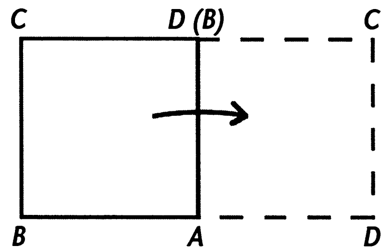


Рис. 3

После остановки на обед ребята немного притихли и вновь некоторое время ехали молча. Затем кто-то заметил табличку с названием очередного *населенного пункта* (приходится использовать этот некрасивый *канцелярский* оборот, поскольку по табличке нельзя было понять, что это: город, деревня, село, поселок или что-то иное) — «Звонкие Бубенцы» —

и спросил, сколько им еще осталось ехать. Сеня ответил, что им осталось проехать ровно в два раза меньше того, что они проехали после обеда, то есть после Верхних Белок. Потом он помолчал и предложил задачу.

21. – Чему равно расстояние от школы, откуда мы выехали, до Квашина, если расстояние между деревней Моховая и Звонкими Бубенцами равно 200 км?

(Чтобы решить эту задачу, надо прочитать предыдущий абзац и одно место в начале этой главы. А чтобы задачу было легче решить, советуем изобразить путь от Москвы до Квашина в виде отрезка прямой и отметить на нем все упомянутые в рассказе места).

Это была последняя задача. Вскоре ребята усталые, но довольные прибыли в Квашино. У всех было *предвкушение* чего-то интересного и... *вкусного*. А может, *предвосхищение* чего-то удивительного и... *восхитительного*.

Глава 3

ПЕРВЫЙ ДЕНЬ В ЛАГЕРЕ. ВЫБОРЫ

На следующий день после приезда состоялось общее собрание. Обсуждали, как говорится, организационные вопросы. Все ребята были настоящими демократами. Было решено сбросить диктатуру взрослых и организовать Президентскую республику. А для этого надо было разработать Конституцию, создать гимн, герб и флаг Республики. Но, самое главное, надо было выбрать президента. Организовали Конституционную комиссию и назначили авторов будущих гимна, герба и флага. Тем более что большого выбора здесь не было. Так, гимн поручили написать известному *классному* поэту Алику Сушкину. Помогать ему согласился дедушка Гаврила. Герб и флаг должны были создать художники Артем Брандт и Ильза Репкина. Затем объявили перерыв на два часа для организации партий и выдвижения кандидатов.

И здесь случилась одна прелюбопытнейшая история, можно сказать, произошел *казус*, имеющий прямое отношение к математике. Этот казус, возможно, остался бы незамеченным, если бы не дедушка Гаврила. Но все по порядку.

Первый этап — организация партий — был пройден относительно быстро, хотя и не без проблем. Число партий достаточно быстро стабилизировалось на величине 4. Просто по числу углов в комнате. Ведь именно в углу удобно *уединиться*, а затем и *объединиться*.

Сначала хотели назвать партии по географическому признаку: Северная, Южная, Западная и Восточная. Но потом подумали, что это не очень романтично. В результате партии получили названия: партия Аргонавтов, партия Бледнолицых, Веселая партия и партия Гуманоидов. Коротко *А*, *Б*, *В* и *Г*. Каждая партия предложила своего кандидата в президенты.

После двухчасового перерыва ребята вновь собрались. Надо было обсудить процедуру выборов. Каждая партия внесла свое предложение.

А:

— Чего здесь думать и обсуждать! Печатаем бюллетени с фамилиями кандидатов в президенты. Каждый ученик ставит галочку около фамилии поддерживаемого им кандидата. Кто наберет больше голосов, тот и президент.

Б:

— Нет, так нельзя. Если никто не наберет больше половины голосов, надо устроить повторное голосование, второй тур, в котором должны участвовать двое лучших по результатам первого тура.

В:

— Наша партия считает, что надо выбрать того, кто лучше любого другого. Как это сделать? Да очень просто. Пусть каждый ученик составит список: на первое место в своем списке он должен поставить самого достойного, по его мнению, кандидата, на второе — второго и так далее. Если в большинстве списков кандидат *В* стоит выше *А*, значит, он лучше *А*. И вообще, *В* лучше всех, если он лучше *А*, лучше *Б* и *Г*. Значит, он и президент.

Г:

— Мы согласны с тем, что следует каждому составить свой список, как предложил *В*. Но дальше надо поступить по-другому. За первое место в списке кандидат получает 3 очка, за второе — 2, за третье — 1 и за последнее — 0. Кто наберет больше всех очков, тот и президент.

Все четыре предложенных способа, как видно, вполне демократичны. После недолгого, но бурного обсуждения, был принят вариант *Б*. Но многие ребята вертели в руках составленные ими списки, как предложил представитель *В*, не зная, что с ними делать. Тут дедушка попросил, чтобы они отдали свои списки ему для проведения, как выразился дедушка, социологического исследования.

Но выборы в этот день провести не успели. Их перенесли на следующий день. То есть на завтра. Один день был отведен на предвыборную агитацию.

Предварительные оценки показывали, что сторонники *Б* имеют неплохие шансы провести своего президента. Именно партия *Б* и провела наиболее бурную предвыборную агитацию.

Состоявшиеся на другой день выборы, как и предполагалось, прошли в два тура. Победителем оказался представитель партии *В*. Дедушка попросил ребят для своего социологического исследования еще раз предоставить свои списки. Он хотел выяснить, как повлияла на результаты выборов предвыборная кампания. Если, конечно, она на что-то повлияла.

И вот вечером, после торжественной инаугурации дедушка Гаврила выступил с поистине сенсационной речью.

— Дорогие друзья и коллеги. *Позвольте мне,* — тут дедушка немного подумал и *поправился*, в смысле *поправил себя, — позволю себе* поздравить вас с образцово проведенной избирательной кампанией. Я изложу результаты проведенного мною социологического исследования.

Тут дедушка сделал глоток воды из стакана и заговорил *сухим протокольным* языком:

— В голосовании участвовало 50 человек. Соответственно, у меня есть 50 списков предпочтений, которые я получил перед началом избирательной кампании, и 50 — после ее завершения. Все списки разделились на шесть групп. Перечислю их.

В 6 списках кандидаты расположены в следующем порядке: *А — Б — В — Г*.

В 10 — порядок: *А — В — Г — Б*.

В 14 — порядок: *Б — Г — В — А*.

В 12 — порядок: *В — Г — Б — А*.

В 4 — кандидаты расположились так: *Г — Б — А — В*.

И еще в 4 — так: *Г — В — А — Б*.

Что же мы имеем? В первом туре кандидат *А* набирает 16 голосов, а кандидаты *Б*, *В* и *Г* соответственно 14, 12 и 8. Таким образом, по первой схеме, предложенной представителем партии *А*, побеждает ее кандидат.

При голосовании в два тура во второй тур выходят кандидаты *А* и *Б*. Во втором туре кандидат *А* получил бы 20 голосов. Он выше *Б* лишь в 20 списках. В то время как *Б* во втором туре набрал бы 30 голосов и победил бы с большим преимуществом. Итак, при схеме, предложенной партией *Б*, победил бы ее кандидат.

Вы уже наверняка догадались, что по схеме, предложенной представителем партии *В*, победил бы ее кандидат. В самом деле, в 30 списках *В* стоит выше *А*, в 26 — выше ***Б*** и в 28 — выше ***Г***. Значит, он лучше всех. Кстати, предложенный метод не всегда приводит к результату. Могло получиться, например, что *А* лучше *Б*, *Б* — лучше *В*, *В* — лучше *Г* и *Г* — лучше *А*. Но в данном случае этого не произошло.

При голосовании по способу, предложенному партией *Г*, победил бы ее представитель. Он набрал бы 86 очков против 84 у *В*, 74 — у *Б* и всего 56 — у *А*.

Итак, при выборах в два тура в голосовании должен был победить кандидат *Б*. И победил бы, если бы не активность его сторонников. Они развили такую бурную деятельность, что в результате кандидат от партии *Б* проиграл. Как же это могло случиться? Итак, смотрим списки избирателей после проведенной агитации. В каждой группе произошли одинаковые изменения.

Первая группа из 6 человек: *Б* — *А* — *В* — *Г*.

Вторая группа из 10 человек: *А* — *В* — *Б* — *Г*.

Третья группа из 14 человек: *Б* — *Г* — *В* — *А*.

Четвертая группа из 12 человек: *В* — *Б* — *Г* — *А*.

Пятая группа из 4 человек: *Б* — *Г* — *А* — *В*.

И последняя, шестая, из 4 человек: *Г* — *В* — *Б* — *А*.

Как видите, позиция кандидата от партии *Б* улучшилась во всех списках, где она могла быть улучшена. Более того, все изменения в списках связаны лишь с перемещением кандидата от партии *Б*. Казалось бы, предвыборная кампания партии *Б* была проведена прекрасно. Но мы знаем, что в результате победил *В*. Что же произошло? После первого тура лучшими оказались кандидаты от партий *Б* и *В* — соответственно 24 и 12 голосов. Партия *Б* чуть-чуть не дотянула до победы в первом же туре. А во втором туре партия *Б* осталась со своими 24 голосами, в то время как партия *В* набрала 26 голосов.

Приведу еще несколько примеров-задач на эту тему.

22. На общем собрании Академии, в котором участвовали 200 академиков, должны были состояться выборы президента Академии. В соответствии с регламентом выборы должны происходить в два тура. Как это было у нас. Если в первом туре ни один кандидат не набирает больше половины голосов, то проводится второй тур, в котором соревнуются двое лучших. Все члены Академии разбились на три группы: «старики», «среднее поколение» и «молодежь». Не станем указывать, какого возраста была молодежь в Академии. Даже самый молодой академик был намного старше самого старшего из вас. У вас еще все впереди. Итак, в группе стариков было 98 человек, к среднему поколению относилось 66 человек, а молодежи, как нетрудно подсчитать, было всего 36 человек. Было три кандидата: Аксакалов (*А*), Бодров (*Б*) и Веснушкин (*В*). Я думаю, вам ясно, кто и кого представлял. Известно, что сторонники *В* в случае неуспеха своего кандидата все до одного поддержат кандидата *Б*. В то время как сторонники кандидата *Б* в подобном случае разделятся примерно пополам. Одни поддержат *А*, другие — *В*. Как вы думаете, кто стал президентом Академии?

23. Следующая задача не совсем на тему, но что-то близкое к ней здесь есть. Как вы знаете, в прежние века случались дуэли. Потом их запретили. Наверное, правильно. Много хороших людей погибло на этих дуэлях. Ведь именно люди чести готовы пожертвовать своей жизнью ради чести своей и близких людей. Но не будем отвлекаться. Я перейду к нашей истории. Три гусара — *А*, *Б* и *В* — во время вечеринки поссорились и вызвали друг друга на поединок. Условия дуэли, а вернее триэли, были следующими: все трое располагаются на равных расстояниях друг... виноват, недруг от недруга и по очереди, согласно заранее брошенному жребию делают по одному выстрелу. Мишень каждый выбирает по своему усмотрению. Триэль продолжается до тех пор, пока в живых не останется лишь один из трех (ведь поссорились они насмерть). Каждый из них хорошо знает стрелковые возможности соперников. Гусары *А* и *Б* попадают в цель 9 раз из 10, а гусар *В* — только 7. Как, по вашему мнению, закончилось это сражение, если происходило оно на следующее утро и каждый все обдумал и хотел максимально использовать свои возможности, чтобы остаться в живых?

Но не успел дедушка закончить формулировать эту задачу, как к нему подошел какой-то человек и протянул записку. Дедушка прочитал записку и сказал:

— Кажется, нам еще раз придется заняться выборами. В нашем районном центре Дебрянске должен состояться слет школьников «По пути в науку». Нам нужно выбрать 11 человек для участия в этом слете. Предлагайте, кто, по вашему мнению, наиболее достоин принять участие в этом слете.

Первым был выдвинут известный всем... Но не буду называть его имя и фамилию, тем более что вы, наверное, уже и сами догадались. Обозначу его буквой X. Это, конечно, не совсем хорошо, ведь буквой X обычно обозначают неизвестное, а здесь как раз наоборот — очень даже известный человек. Итак, первым выдвинули X. Но дальше вышла заминка. Все казались примерно равными. Через некоторое время список из 11 человек все же был составлен. Открытым голосованием все *единогласно* поддержали список. (Голосовать списком, конечно, не совсем правильно, но иногда можно.) Затем дедушка сказал, что из выбранных 11 человек надо еще выбрать одного — руководителя делегации. Здесь дедушка настоял на том, что выборы должны быть тайными. Каждый школьник сдал записку с номером делегата, который, по его мнению, должен быть руководителем. Конечно, им стал X. С *подавляющим* (слово не очень хорошее, тем более что X не любил и не умел *подавлять*) преимуществом. Но не единогласно. Что-то около 40 голосов получил X.

В этот момент дедушка получил еще одну записку. Прочитав ее, он немного нахмурился.

— Час от часу не легче. Оказывается, в делегации должно быть не 11, а 10 человек. Придется нам еще раз проголосовать, кого исключить из нашего списка.

Быстро провели тайное голосование. Его результат оказался неожиданным. Правда, Федя не очень удивился. И если вы читали предыдущую книгу про Федю и дедушку, то без труда ответите на вопрос.

24. Кто в результате этого голосования был исключен из списка? Как это можно объяснить?

Затем был обед, а вечером состоялся *торжественный вечер*. (Вечера бывают ежедневно, но не всякий вечер является торжественным). Всем раздали текст Конституции. Работа Конституционной комиссии была очень плодотворной, несмотря на то что сама Конституция оказалась совсем краткой. Она состояла из трех статей.

КОНСТИТУЦИЯ КМДР (КВАШИНСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ДЕМОКРАТИЧЕСКОЙ РЕСПУБЛИКИ)

Статья 1. *Права*. Каждый гражданин имеет право на самое лучшее математическое образование.

Статья 2. *Обязанности*. Каждый гражданин обязан заниматься математикой в полном соответствии со своими способностями.

Статья 3. Гражданин имеет право пользоваться своими правами, только если он выполняет свои обязанности.

Это была самая образцовая Конституция из всех известных и даже неизвестных автору Конституций. То есть автору этой книги, а не Конституций.

Неплохо потрудилась и группа художников. Флаг решено было сделать черно-белым, с изображением на нем геометрических фигур. Сначала сделали эскиз. Он имел вид прямоугольника, бóльшая сторона которого равнялась 2 м. На этом прямоугольнике было три полосы также в виде прямоугольников. Эти полосы символизировали Арифметику, Геометрию и Алгебру. Центральную часть, соответствующую Геометрии, было решено сделать квадратной. При этом сторону квадрата (она равна ширине флага) выбрали таким образом, чтобы сумма площадей прямоугольников, соответствующих Арифметике и Алгебре, была наибольшей.

25. Чему была равна ширина флага?

Затем к эскизу добавились детали. И в результате получился флаг, который вы видите на рис. 4.

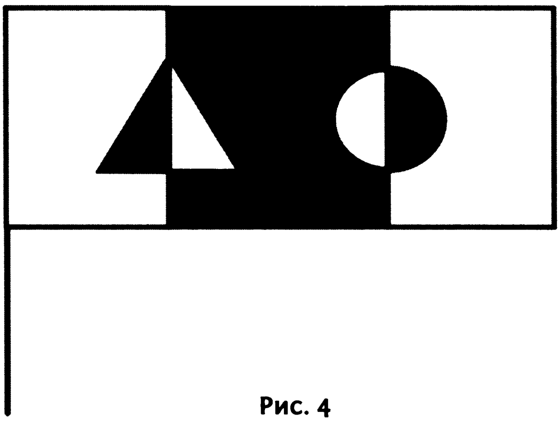


Рис. 4

Для герба в качестве исходного чертежа решили взять окружность, в которую вписан правильный многоугольник. Но здесь возник спор, сколько сторон должен иметь этот многоугольник. В качестве вариантов предлагались треугольник, четырехугольник (то есть квадрат), шестиугольник и пятиугольник.

26. Впишите в окружность правильный шестиугольник, треугольник и квадрат (именно в таком порядке). У вас имеется окружность с отмеченным центром. Пользоваться можно лишь циркулем и линейкой.

Большинством голосов, а значит единогласно, поскольку художников было двое, решили, что лучше всего — пятиугольник. Но здесь возникла проблема, как вписать в окружность правильный пятиугольник. Для остальных рассматривавшихся многоугольников эта задача была легкой и известной.

Итак, возникла задача вписать в окружность правильный пятиугольник. Предложение сделать это с помощью транспортира было с негодованием отвергнуто. Надо действовать по всем правилам математической науки. И тут на помощь пришел дедушка. Он показал очень простой и красивый способ построения правильного пятиугольника, вписанного в окружность. Он его назвал *японским*. Из рис. 5 понятно, как построить сторону такого пятиугольника. Это — отрезок AB. Конечно, можно было построить только одну из двух изображенных на рисунке маленьких окружностей. Но тогда картинка была бы не симметричной.

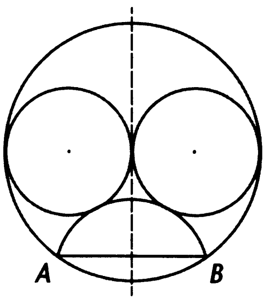


Рис. 5

Возникает вопрос.

27. Почему отрезок AB равен стороне правильного вписанного пятиугольника?

Ответ на этот вопрос дан в конце книги. Но чтобы понять данное там объяснение, нужны знания на уровне 8-го класса.

Рис. 6

Затем на гербе, как и положено, появилась лента Мёбиуса и еще кое-что. В результате получился герб, который вы видите на рис. 6.

В тот же вечер в первый раз произошла *инаугурация*. Президент прочитал, или *зачитал*, присягу, то есть *текст* присяги.

— Вступая в должность президента Квашинской математической демократической республики, торжественно клянусь...

Затем состоялось и первое исполнение гимна. Аккомпанировал на аккордеоне Моцарт Савельевич.

ГИМН КМДР
(на мотив «В лесу родилась елочка»)

Мы любим Математику,
С ней вместе мы растем.
Зимой и летом стройные
И умные притом.

Умеем веселиться мы,
Петь песни, танцевать.
Задачи интересные
Нам нравится решать.

Прожить без Арифметики
И Алгебры — нельзя,
Фигуры Геометрии
Нам лучшие друзья.

Сегодня Математика
В квартиры к нам пришла
И много-много радости
Ребятам принесла.

Усталые и довольные, все пошли спать. Федя заснул быстро, можно сказать мгновенно. Но все же успел подумать о приятных вещах. Ведь мысль *мгновеннее* любого действия. Он вдруг вспомнил родителей и подумал, какие они у него умные. И дело даже не в том, что они — научные работники. А вот как они догадались, что он и в самом деле Федя? Ведь могли бы дать ему какое-нибудь неправильное имя. А потом живи с этим неправильным именем...

С этой приятной мыслью он и заснул.

Глава 4

ПРО ДЕДУШКУ И ЖИЗНЬ В МАТЕМАТИЧЕСКОМ ЛАГЕРЕ

Может показаться несколько странным, что автор решил немного подробнее рассказать о главном герое уже после того, как написал о нем целую книгу. Но это легко объяснить. Все дело в том, что, когда автор начинал свою работу над первой книгой, он еще не был хорошо знаком с дедушкой. Но постепенно он все лучше и лучше узнавал его и теперь полагает, что хорошо знает дедушку и может о нем рассказать более подробно.

Дедушка обладал одним очень редким качеством: он оказывал на окружающих *благотворное* влияние. И это несмотря на то, что по характеру дедушка был *горяч* и *непоседлив*. Кстати, автор на себе испытал благотворное влияние дедушки. И сейчас нередко обращается (мысленно) за советом к дедушке, когда чувствует, что может совершить *необдуманный* или же неправильный поступок.

Во многом с дедушки следует брать пример, но подражать ему не стоит. Впрочем, подражать не следует никому. Да и насчет *«брать пример»* не все ясно. Что вообще означает это выражение: *«брать пример»*? Дедушка не очень любил ставить кого-нибудь в пример. А ведь почти все взрослые постоянно ставят в пример кого-нибудь, кого увидели по телевизору или о ком прочитали в новостях. Но особенно самих себя. Особенно родители — своим детям.

— Почему ты это делаешь, ведь я же так не делаю?

— Не перебивай меня, ведь я же тебя не перебивал.

— Вот я в твои годы...

— Если бы я был на твоем месте...

— Смотри, какой хороший мальчик (или девочка).

И так далее.

Человек создает себя сам. В каком-то смысле тот человек, которым дедушка стал, не соответствовал тому, каким он был изначально.

Вы знаете, что дедушка был учителем математики. Но это не совсем правильно, а может, и совсем неправильно. Дедушка был учителем и математиком или математиком и учителем. Настоящим учителем и Настоящим математиком. А это не профессии, а состояние души. И не беда, что больших открытий в математике дедушка не сделал. Не всякий академик отделения математики математик. Важно, что дедушка любил и понимал математику.

Дедушка объяснял, что своими лучшими качествами он обязан своим профессиям. При этом он часто рассказывал об одном известном актере, народном артисте. Актер в жизни сильно заикался. Но когда его спрашивали, как так получается, что он не заикается на сцене, актер, сильно заикаясь (не будем это показывать), отвечал: «Но ведь тот, кого я играю, он же не заикается!» И дедушка добавлял: «Занятия математикой делают человека умнее, чем он есть на самом деле. Глупый математик — это *нелепость*.

Учитель — самая добрая на свете профессия. Она заставляет человека быть добрее, даже вопреки своему характеру. Учитель должен постоянно совершенствоваться».

Школа была для дедушки храмом. Ему и сейчас снились сны про школу, и нередко в этих снах сам дедушка был не учителем, а учеником, сидящим за партой. Он даже чувствовал во сне некоторую неловкость, так как понимал, что знает намного больше, чем сидящие рядом ученики.

Одним из самых скверных качеств, по мнению дедушки, является лицемерие. Человек должен всегда говорить только то, что он думает. Но не только. Человек должен то, что он думает, говорить. (Видите разницу?) За редкими исключениями. Сам он следовал этому правилу. Дедушка просто не мог кривить душой.

Учителем дедушка был не совсем обычным. Он полагал, что оценивать работу учителя надо по его ученикам, причем не только по тем ученикам, которые стали выдающимися людьми — учеными, писателями, артистами, орденоносцами, лауреатами разных премий. Талантливый ученик — радость учителя, но не заслуга. Именно обычные люди определяют качество работы школы, а значит, и учителя.

Дедушка хорошо знал свой предмет и умел учить детей решать задачи. Он очень расстраивался, когда кто-нибудь говорил: «Нас этому не учили». «Смысл учения как раз в том и состоит, чтобы научить тому, чему не учили», — возражал он. Дедушка так же не очень хорошо, то есть не совсем правильно, относился к олимпиадам. «Математика — это не спорт, не следует занятия математикой превращать в сплошные соревнования». Нет, ученики дедушки регулярно ходили на разные математические олимпиады и даже занимали призовые места. Но это не превращалось в цель обучения.

Случались и странные истории. Так, один из учеников на одной из олимпиад решил только одну задачу. Правда, самую трудную. По геометрии. К тому же четырьмя способами. Другие задачи ему показались неинтересными. Никакого приза он не получил. Другой ученик, наоборот, решил все задачи. Но не стал сдавать работу. А принес ее дедушке. И они вдвоем весь вечер обсуждали эту работу и спорили.

...Вот таков был дедушка. Возможно, позднее автор добавит еще какие-нибудь детали к его портрету. Но это позднее, а пока надо выполнить вторую часть обещания, данного в названии главы.

Математический лагерь был устроен в пансионате, который принадлежал Квашинской кондитерской фабрике. Вокруг был лес, рядом речка и озеро. Место было необычайно красивым и живописным. Впрочем, в Старорусской области просто невозможно найти место, которое не было бы красивым и живописным и даже необычайно красивым и живописным. Описывать само место более подробно автор не собирается, поскольку это просто невозможно. Надо видеть своими глазами. Но на одну деталь того лета стоит обратить внимание: было очень много пчел. Оказывается, Моцарт Савельевич увлекся пчеловодством. И не только *увлекся* сам, но и *увлек* дедушку Гаврилу. Они вдвоем очень много *экспериментировали*. Дедушка объяснил ребятам, что пчел не следует бояться, они очень умные и *не жалят кого попало*. А детей они любят. Только не надо их обижать.

Когда дедушка это объяснял, ему на руку сели две пчелы. Он аккуратно сдул одну, а когда внимательно присмотрелся к другой, улыбнулся:

— Гляди-ка, *трутень*. Этот простодушный парень честно признается: я *тру тень*. Я знаю людей, которые занимаются не менее бесполезными делами, но называют себя... — тут дедушка задумался. —

Ну, что ж, не будем лезть к нему в душу и мысли. Ну а то, что от пчел людям большая польза, знают все, — продолжал дедушка. — Мед очень хорошо питает мозг, а значит, необходим математикам. И не только им.

И в самом деле, многочисленные пчелы, заполнявшие окружающее пространство своим трудолюбивым гудением, были на редкость добродушны. За все время они ни разу не укусили, точнее не *ужалили*, никого из ребят. Правда, несколько раз их атакам подвергся один человек, работавший в столовой. Но дедушка дал ему какую-то мазь, и пчелы его больше не трогали.

Распорядок дня в лагере был очень простой. От 8.00 до 10.00 подъем, зарядка и завтрак. С 10.00 до 14.00 — занятия. Обычно были одна или две лекции, а затем практические занятия. От 14.00 и до 16.00 обед и что угодно, а после обеда — «Разное». В это «Разное» входило столько разного, что трудно перечислить. И не будем этого делать.

Но не одной только математикой занимались ребята в лагере (*питали свой мозг*). Представьте себе, что вы очень любите мороженое. Или картошку. Или даже и мороженое, и картошку. Не станете же вы на завтрак, обед и ужин есть только картошку или мороженое. (Кажется, кто-то подумал *про себя* и *про себя*, а почему бы и нет. Ну что ж, пусть попробует!)

Для лагеря дедушка собрал хорошую библиотеку. В библиотеке было много настоящей литературы и большая коллекция альбомов по живописи. Со многими художниками ребята познакомились впервые. То есть не с самими художниками, а с их работами. Конечно, репродукция не может дать полное представление о подлинном произведении искусства, но может хорошо с ним познакомить, если она сама — репродукция — хорошая.

Был в лагере и небольшой Заповедник. Заповедником объявили пустырь, расположившийся за столовой, и небольшой пруд около пустыря. По Заповеднику нельзя было ходить, чтобы случайно не наступить на муравья или на какую-нибудь травинку. Объясняя, почему так надо себя вести, причем не только в Заповеднике, дедушка прочитал целую лекцию о том, как люди, не всегда со зла, а от незнания и непонимания, приносят вред природе. Большое впечатление, можно даже сказать неизгладимое впечатление (правда, чтобы проверить правильность этого определения, надо подождать хотя бы десять лет), произвели на ребят две истории, рассказанные дедушкой.

Есть в Индийском океане остров Стивенс. Жила на этом острове небольшая птичка с трогательным названием *троглодит.* Птичка эта не летала и строила свои гнезда прямо на земле. Ведь врагов на острове у нее не было. Недалеко от острова часто проплывали большие и малые корабли. И решили люди построить на острове маяк, чтобы облегчить плавание этих кораблей. Построили маяк, появился смотритель маяка. Возможно, это был очень добрый и хороший человек. Но он, чтобы не было скучно, взял кота. А кот за один год уничтожил всех птичек. Произошло это, кажется, в 1868 году.

И другая история. Эту историю надо вспоминать каждый год 1 сентября, когда дети идут в школу. 1 сентября 1909 года в зоопарке американского города Цинциннати умер последний на земле странствующий голубь. А ведь еще за несколько лет до этого огромные стаи странствующих голубей путешествовали по Северной Америке. Некоторые стаи были столь велики, что когда голуби садились на деревья, у деревьев ломались ветки. Жители Америки охотились на голубей и ели их. (Ужасно, не так ли?)

Говорили, что у них очень вкусное мясо. И вот голуби исчезли. И не постепенно, а сразу. Жители Америки ужасно удивились. Они даже объявили премию для того, кто найдет гнездо с парой странствующих голубей. Но эту премию так никому и не вручили. И уже не вручат.

Вот так! Сначала на земле исчезли странствующие рыцари, а затем и странствующие голуби.

Ребята всё хорошо поняли. Они поняли, что природу надо беречь. И не только в заповедниках. Что же касается Заповедника, организованного в лагере, то там было оборудовано несколько наблюдательных постов. Оттуда можно было наблюдать удивительный мир, интересную жизнь, полную радостей и трагедий. Вот муравей тащит в свой муравейник иголку, во много раз больше самого себя. Сверкнет вдруг зеленым золотом бронзовка. А рядом оса атакует мирного паука-сенокосца. В кустах сплел огромную сеть паук-крестовик и терпеливо ждет добычу.

Настоящую симфонию природы можно услышать, если сидеть тихо. Вот вдалеке закуковала кукушка, басовито жужжит шмель, несколько раз квакнула лягушка, как бы размышляя, надо ли предсказывать дождь. И *стрекочут* кузнечики. Человек может подражать разным голосам. Он может мяукать, как кошка, или лаять, как собака, каркать наподобие вороны или кудахтать, как курица. Можно даже свистеть, как соловей, и издавать писк, похожий на комариный. Но если есть что-то на свете *неподражаемое*, так это стрекотание кузнечика. Стрекочет кузнечик, *тря*... Лучше так: кузнечик трет свои длинные ноги о крылья и стрекочет. Получается, сам кузнечик — скрипка, а его ноги — смычки. Говорят также, что уши кузнечика находятся в его ногах. Удивительно!

Своей жизнью живет пруд. Торпедой проносится большой жук-плавунец, роятся маленькие жучки-вертячки, скользят по воде водомерки, веселою гурьбой плывут головастики. А вдоль воды стремительно проносятся стрекозы, демонстрируя фигуры наивысшего пилотажа. Их фантастические глаза-головы вполне могут служить моделью для фильма о космических пришельцах.

О жизни на пустыре и в пруду можно написать книгу, и не одну. Оставим это дело настоящим знатокам.

Были в лагере две важные... Чего — штуки? вещи? В общем, в лагере была Комната размышлений и Доска общения (ее было назвали Доской сообщений, но затем откинули «со-» и уменьшили число).

В Комнате размышлений можно было посидеть и подумать. Там нельзя было разговаривать, но зато было все, что могло помочь размышлять. На стенах висели картины. Дедушка отдал свои знаменитые «Треугольник», «Квадрат» и «Круг». В этой комнате можно было послушать хорошую музыку. Конечно, через наушники. Дедушка был убежден, что хорошая классическая музыка развивает мозг, помогает думать и даже снимает усталость.

На Доске общения каждый мог поместить все что хотел, все что душе угодно. Здесь можно было предложить тему для *дискуссии* или *диспута*. (Чувствуете разницу?) И если находилось по крайней мере три человека, которым эта тема нравилась (автор объявления и еще двое), дискуссия проводилась. Темы были самыми разными: «О смысле жизни», «Есть ли жизнь на Марсе?», «Что такое синхрофазотрон?», «Умеют ли собаки думать?», «С чего начинается бесконечность?» и прочее. Проводились дискуссии и диспуты на берегу реки Тихой. Там было специальное место, которое называлось «Наречие». Ведь это место было на речке и там произносились речи. На доске можно было также поместить образцы своего творчества. С подписью или без. Кто-то писал стихи. Среди них встречались и вовсе не плохие. Многим понравилось такое стихотворение:

Цветы, родившиеся ночью,
Заголубели на заре.
Как будто порванное в клочья
Лежало небо на земле.

Я вспомнил слышанное где-то,
Что небо, захотев вздремнуть,
Ложится на земную грудь
И отдыхает до рассвета.

Под стихами стояла подпись: Опушкин. Это был явный псевдоним. Настоящего автора так и не нашли. Подозрение пало на одного шестиклассника. Почему — непонятно, поскольку тот ранее в таких действиях, как писание стихов, замечен не был. Но подозрение, как известно, еще не доказательство. А признаваться указанный ученик не стал категорически.

И конечно, каждый день на этой доске появлялись новые задачи. Некоторые придумывали сами ученики, некоторые они вспоминали, а большинство задач предлагали дедушка и другие математики и учителя. Вот небольшой список этих задач.

28. Вася сложил два шестизначных числа, а затем поменял местами две цифры. Вот что у него получилось.

$$\begin{array}{r} 785643 \\ +\,223579 \\ \hline 999212 \end{array}$$

Поменяйте две цифры, чтобы получилось верное равенство.

29. Здесь записаны несколько примеров, первые три на умножение, а последний – на умножение и сложение. Каждый крестик замените на цифру так, чтобы получилось верное равенство.

а)

$$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r} xx \\ 8x \end{array} \\ \hline xxx \\ xx \\ \hline xxxx; \end{array}$$

б)

$$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r} 6x \\ xxx \end{array} \\ \hline xx \\ xx \\ xx \\ \hline xxx6; \end{array}$$

в)

$$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r} xxx \\ x3x \end{array} \\ \hline 3xx \\ xx3x \\ 3xx3 \\ \hline xxxxxx; \end{array}$$

г)

$$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r} xx \\ xx \end{array} \\ \hline xxx \\ xxx \\ \hline xxxx \\ +\;1xx \\ \hline xxxxx. \end{array}$$

30. А в этом примере на умножение каждую букву «ч» надо заменить на какую-нибудь четную цифру, а букву «н» — на нечетную, чтобы получилось верное равенство:

$$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r} ччн \\ нн \end{array} \\ \hline чнчн \\ чнн \\ \hline ннннн. \end{array}$$

31. Возьмем таблицу 3 × 3 и проведем через ее клетки ломаную (из каждой клетки мы идем в соседнюю по строке или по столбцу), например, как на рис. 7. Расставим по порядку вдоль ломаной числа от 1 до 9. Рассматривая строки, мы получим три трехзначных числа. Проведите ломаную так, чтобы число в нижней строке равнялось бы сумме чисел в двух верхних строках.

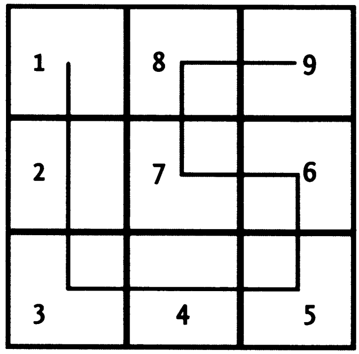


Рис. 7

32. В саду у дедушки Мазая имеется всего 5 рядов яблонь по 4 яблони в каждом ряду. Всего 10 яблонь. Как это может быть? (Если три или большее число деревьев расположены на одной прямой, то они образуют ряд.)

33. Чему равен угол между минутной и часовой стрелками часов в 7 часов 38 минут?

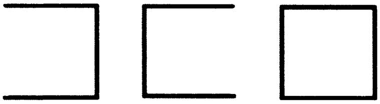
34. Шины фирмы «Бриджстоун» изнашиваются через 45 000 км, а шины Ярославского шинного завода – через 55 000 км. Какое максимальное расстояние сможет проехать автомобилист, у которого имеется 2 комплекта шин фирмы «Бриджстоун» и 3 комплекта шин Ярославского завода? (Считаем, что наш автомобилист имеет право использовать во время движения шины различных фирм, что справедливо запрещается Правилами дорожного движения.)

35. В беге на 1500 метров бегун *А* опережает бегуна *Б* на 100 метров. Бегун *Б* на той же дистанции опережает бегуна *В* на 75 м. На сколько метров в беге на 1500 метров бегун *А* опередит *В*? (Мы предполагаем, что каждый бежит с постоянной скоростью, чего, конечно, никогда не бывает.)

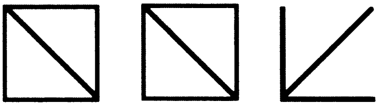
36. В левой части равенства $2 \cdot 3 \cdot 2 + 3 \cdot 4 \cdot 3 + 4 \cdot 5 \times 4 = 3600$ расставьте скобки так, чтобы оно стало верным.

37. Изогните кусок проволоки так, чтобы спереди, слева и сверху он выглядел так, как показано на рис. 8, *а*, *б*.

38. На столе лежат одинаковые монеты (рис. 9, *а*). Их 6 штук. Перемещая монеты пальцем, не отрывая их от стола, расположите их, как показано на рис. 9, *б* (внутрь кольца, образованного монетами, можно положить монету, касающуюся их всех).

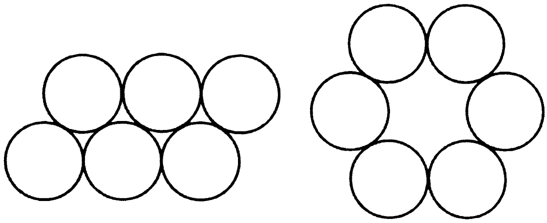


а



б

Рис. 8



а *б*

Рис. 9

39. В 6 часов утра группа альпинистов отправилась на вершину горы. Ровно в 6 вечера они достигли вершины. Переночевав на вершине, на следующее утро ровно в 6 часов они начали спуск в точности по тому же маршруту и ровно в 6 вечера достигли места, откуда вышли накануне. Докажите, что на их маршруте имеется точка, которую они прошли в одно и то же время дня при подъеме и спуске.

40. На плоскости изображены 8 кругов, соединенные отрезками прямой, как на рис. 10. Расставьте в этих кругах числа от 1 до 8 так, чтобы никакие два соседних числа не были бы соединены отрезком.

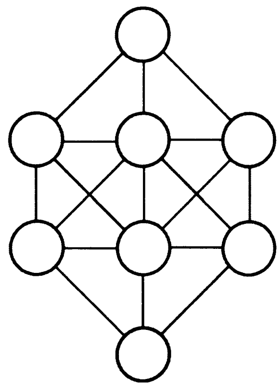


Рис. 10

41. Геннадий Факельников выиграл одну партию в теннис у Андре Агасси со счетом 6 : 3. При этом в 5 играх (как говорят теннисисты, геймах) побеждал тот, кто не подавал. Кто подавал первым?

42. Каждую букву в равенстве роса + сок = рука замените цифрой (одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным — разные) так, чтобы получилось верное равенство. (Задача эта с подвохом. Советуем вам вспомнить начало легенды, рассказанной в первой книге про Федю и дедушку.)

43. Разрежьте квадрат на остроугольные треугольники.

44. Имеется деревянный куб $3 \times 3 \times 3$. Распилите его на 27 единичных кубов. Постарайтесь при этом сделать как можно меньше распилов.

45. Имеется два куска бикфордова шнура (бикфордов шнур — это шнур, который сгорает за определенное время, и при этом его очень трудно погасить). Известно, что каждый из них сгорает ровно за 1 минуту, но при этом скорость горения не является постоянной. Как с их помощью отмерить 45 секунд?

46. Имеются два слитка золота в 3 кг и 4 кг с различным процентным содержанием золота. Каждый слиток делится на две части, и из четырех слитков изготавливают два слитка — в 2 и 5 кг с равным процентным содержанием золота. На какие части следует разделить исходные слитки? (Если вы плохо разбираетесь в процентах, то прочитайте сначала главу 5.)

47. а) Расположите на плоскости 11 непересекающихся квадратов таким образом, чтобы при любой окраске их в три цвета нашлись бы два квадрата одного цвета, граничащие друг с другом по части стороны.

б) Расположите на плоскости 11 попарно не пересекающихся равных окружностей таким образом, чтобы при любой окраске этих окружностей в три цвета нашлись бы две касающиеся одинаково окрашенные окружности.

48. Маленький Принц живет на астероиде, который вращается вокруг звезды Бальдерана. Вокруг этой звезды вращаются четыре большие шарообразные планеты. На этом астероиде раз в 1000 лет бывает абсолютное затмение. Планеты располагаются так, что ни один луч света ни от звезды Бальдераны, ни от иных далеких звезд не достигает астероида. Возможно ли это? Переводя на математический язык, задачу можно сформулировать следующим образом: можно ли четырьмя непересекающимися и даже не касающимися шарами закрыть полностью источник света (можно считать, что источник — в точке)?

Глава 5

ПРО ЦЕНТЫ И ПРОЦЕНТЫ, ИЛИ ПРОСТО ПРО СТО

Как было сказано, занятия в лагере вели и крупные ученые, и обычные учителя, и простые студенты. Невозможно рассказать даже коротко обо всех занятиях. Поэтому автор решил включить в книгу лишь несколько лекций, прочитанных (как известно, лекции именно *читают*, хотя на самом деле их *произносят*) дедушкой Гаврилой.

Свои лекции дедушка любил начинать с какой-нибудь неожиданности. Ребята к этому привыкли и всякий раз *ожидали* очередную *неожиданность*. На этот раз дедушка свою лекцию начал так:

— Может ли быть так, что после увеличения числа на 100 чего-то и затем уменьшения на 50 того же самого — мы получим первоначальное число?

Ребята молчали. Затем раздался радостный возглас:

— Да! Это же...

— Верно, — сказал дедушка, — речь идет о процентах. Если число увеличить на 100 %, а затем уменьшить на 50 %, то получится первоначальное число. Итак, поговорим о процентах, хотя, если признаться, никакого отношения к математике проценты не имеют, но изучают их именно на уроках математики.

49. В одной рекламе утверждается, что газировка подешевела на 20 %, так как теперь бутылка емкостью 0,6 продается по той же цене, по которой продавалась раньше бутылка емкостью 0,5. Конечно, газировка подешевела. Но на сколько процентов?

— Что такое 1 %? — продолжал дедушка. — Ставить так вопрос не очень правильно. Можно говорить об 1 % от какого-то числа. 1 % от числа — это $\frac{1}{100}$ от этого числа. 1 % от рубля — это 1 копейка, а 1 % от доллара — соответственно 1 цент. «Процент» в переводе с латыни как раз и означает «сотая часть». Здесь очень важно, что есть вполне понятная величина, от которой берутся проценты. Деньги — чаще всего, но не только. Мы выражаем в процентах, на сколько мы поправились, выросли, насколько стала больше влажность, уменьшилась освещенность. И прочее. Сегодня очень любят эти самые проценты вставлять куда угодно. Но я не понимаю, что означают слова: «мужчина потеет на 20 % больше женщины» или «этот стиральный порошок на 25 % эффективнее другого», как понимать, что после приема рекламируемого лекарства ваше самочувствие «улучшится сразу на 95 %»?

Чтобы уменьшить число на 1 %, надо вычесть из него 0,01 его самого или же, что то же самое, умножить на 0,99. А увеличение числа на 1 % — это соответственно увеличение его на 0,01 от него самого или же умножение на 1,01.

50. В магазине рядом стоят два телевизора. Один дороже, а другой, соответственно, дешевле. Стоимость более дорогого составляет 125 % от стоимости более дешевого. Сколько процентов от стоимости более дорогого составляет стоимость более дешевого?

51. Как изменится зарплата инженера, если ее сначала уменьшили на 10 %, а затем увеличили на те же 10 %? А если в другом порядке — сначала увеличили на 10 %, а затем уменьшили на те же 10 %?

52. Во время сезонной распродажи цены на обувь были снижены. В одном магазине цена на обувь была сразу снижена на 20 %, а в другом она дважды снижалась и всякий раз на 10 %. В каком магазине обувь дешевле, в первом или во втором? И на сколько (в процентах)? (Понятно, что до сезонной скидки обувь в обоих магазинах стоила одинаково.)

Во время своей лекции дедушка давал время для решения очередной задачи, иногда он приглашал кого-нибудь из ребят к доске, чтобы тот рассказал свое решение.

— Как видите, проценты — очень простая вещь. Тем удивительнее ошибки, допускаемые людьми, претендующими на образованность, когда встречаются с процентами. Я знаю много таких примеров. Не буду их приводить. А особенно боятся многие *сложных процентов*. Но и это ведь очень просто.

53. Давайте решим совсем простую задачу. Накануне Нового года инженеру X объявили, что начиная со следующего месяца его зарплата будет ежемесячно возрастать на 5 %. На сколько процентов вырастет ежемесячная зарплата инженера X к концу года?

Некоторые думают, что она вырастет на $12 \cdot 5 = 60$ %. Это ошибка. Ведь каждый месяц растет зарплата предыдущего месяца. И 5 % исчисляются от предыдущей зарплаты. Чтобы найти зарплату за первый месяц нового года, следует зарплату за последний месяц умножить на 1,05. Зарплата за второй месяц возрастет еще в 1,05 раза (так принято говорить, хотя, конечно, 1,05 — число не целое). Значит, по сравнению с последним месяцем предыдущего года зарплата вырастет в $1{,}05 \cdot 1{,}05 = (1{,}05)^2$ раза. И так далее. К концу года ежемесячная зарплата соответственно увеличится в $(1{,}05)^{12}$ раза. Если мы подсчитаем (можно с помощью калькулятора), то получим примерно 1,80. Значит, зарплата нашего инженера к концу года вырастет примерно на 80%. Это неплохо, конечно, но здесь главное, какова она была в конце предыдущего года.

Я не буду выписывать формулу сложных процентов. Не в формуле дело. Я надеюсь, вы поняли, в чем здесь суть. А что толку от *зазубренной* формулы (вы можете представить себе такую формулу?), если не понимаешь ее смысла?

Мы любим... точнее не мы, а... — тут дедушка немного задумался. — В общем, мы любим говорить «мы». Я хотел сказать, что люди очень часто оценивают величины в процентах, хотя это и не всегда разумно. Вот простой пример.

В районной олимпиаде по математике участвовали команды двух школ. Хотя, конечно, олимпиада — это не спорт, не игра, а тем более командная. Ну ладно. Представьте себе, что в первой команде дипломы победителей получили 80% участников, а во второй — только 50%. Какая команда выступила лучше? Казалось бы, очевидно, что первая. Но не будем спешить. Ведь возможно, что в первой команде было всего 5 школьников, а во второй — 30. Вот вам задача на эту тему.

54. Вася и Коля живут в соседних домах. В каждом доме по четыре подъезда. Некоторые жильцы держат у себя собаку или кошку, а иные даже и собаку и кошку, и по нескольку штук. Как-то приятели подсчитали: в каждом подъезде Колиного дома процент кошек от числа животных, живущих в этом подъезде, больше, чем процент кошек в подъезде с тем же номером в доме Васи. Но процент кошек от числа всех животных во всем доме больше в доме Васи. Как это может быть?

Конечно, есть величины, которые принципиально измеряются в процентах (или в чем-то сходном). Как, например, сравнить, какое море является более соленым: Черное или, допустим, Средиземное? Для этого надо выяснить, какой процент соли содержится в воде того и другого моря. А как это сделать? Надо взять равные количества воды: 1 л или 10 л или даже 100 л. (Кстати, чем больше, тем точнее будет результат.) Выпарить всю воду и измерить количество получившейся соли. Затем подсчитаем, какой процент масса соли составляет от исходной массы воды. Этот процент и покажет нам, какова *соленость* воды в море. Кстати, я сам не знаю ответа на вопрос, какое море, Черное или Средиземное, является более соленым. А ведь это и в самом деле интересно. Известно, что самым соленым в мире является Мертвое море (строго говоря, это не море, а озеро; из «настоящих» морей самое соленое — Красное). Оно настолько соленое, что в нем даже никто не живет.

А вот еще две задачи, но уже на тему влажности.

55. Большинство природных продуктов содержит очень много воды. Процент воды в продукте называют влажностью. Влажность свежих грибов составляет 95 %. Из 10 кг свежих грибов получено 600 г сухих. Какова влажность сухих грибов?

56. На продовольственную базу привезли 10 т свежего винограда. Его влажность составляла 99 %. За время хранения влажность уменьшилась на 1 % (стала 98 %). Сколько тонн винограда теперь хранится на базе?

Я убежден, что вы справитесь с этими задачами, хотя ответ ко второй вас наверняка удивит. Впрочем, многие взрослые, узнав ответ, не верят ему.

Как видите, задачи на проценты не очень трудны. Самой интересной известной мне задачей на эту тему является следующая задача (насколько я помню, ее предлагали на вступительном экзамене на географический факультет МГУ, но это было очень давно).

57. В районной математической олимпиаде от 6 «Б» класса участвовало от 96,8 до 97,2 % от числа всех учеников в этом классе. Какое наименьшее возможное число учеников в этом классе?

Эта задача уже существенно сложнее предыдущих. Главный метод — здравый смысл.

Проделаем сначала эксперимент. Может ли в классе быть 10 человек? Очевидно, нет. Ведь тогда в олимпиаде должно участвовать больше 9 и меньше 10 человек. Это невозможно. Что ж, попробуем решить задачу методом перебора. Пусть в классе 20 человек. Но 96,8 % от 20 — это 19,36. Значит, в олимпиаде участвовало более 19 человек. Опять невозможно. Пусть в классе 30 человек. 96,8 % от 30 — это 29,04. Опять не получается. Но уже близко.

Рассмотрим класс из 31 человека. 96,8 % от 31 — это 30,008. Снова не подходит.

Проверьте, что 32 человека — это наименьшее возможное число учеников в классе. Только 1 не участвовал в олимпиаде. Стоп! Но тогда, может, и решать задачу лучше, если рассматривать число школьников, не участвовавших в олимпиаде? Это *идея*. Решите задачу еще раз, исходя из этой идеи.

Глава 6

ЮБИЛЕЙ

Как и когда возникло Квашино? Почему Квашино? Есть три версии, объясняющие происхождение этого названия. И у каждой — свои сторонники. Одни считают, что основателем Квашина был бывший крепостной крестьянин Емельян Квашин. Отсюда и название Квашино. Однако против сторонников этой теории решительно выступил историк Герасим Дотов, который в своей докторской диссертации доказал, что основал Квашино граф Кирилл Варфоломеевич Ашхарумов, подписывавший свои письма сокращенно: Кваш. По его имени и была названа деревня. Но с историком спорит один известный ученый. Он считает, что несколько столетий тому назад на месте Квашина было селение под названием Чертовы Кулижки. Это название постепенно менялось. Ученый приводит даже очень длинную цепочку этих изменений. И вот в конце появилось Квашино. Есть и четвертая версия, не поддерживаемая научными кругами. Многие считают, что в прежнее время здесь жили люди, владевшие особым рецептом квашения капусты. К сожалению, рецепт этот утерян, и сегодня квашеная капуста из Квашина почти ничем не отличается от капусты, приготовленной в любом другом селении Старорусской области.

Но с тем, что именно в этом году исполняется 10000000 лет с момента основания Квашина, были согласны все. Празднование юбилея было назначено на воскресенье *XX* июля. (Ведь понятно, что точной даты возникновения Квашина никто не знал, да и знать не мог.)

И вот день назначенного юбилея наступил. Состоялось торжественное собрание, на которое прибыли, как было объявлено, *высокие* гости. (Правда, к удивлению ребят, все они оказались весьма *малорослыми.*)

На трибуну поднялся представитель губернатора, он поздравил собравшихся со славным юбилеем, долго зачитывал список достижений в работе квашинцев, а том числе привел один любопытный пример:

— Мы производим две партии лаптей. У нас есть два акционерных общества. Каждое из них покупает одну партию за 7500 рублей. Всего выходит 15000 рублей. Мы возвращаем каждому акционерному обществу по 1000 рублей и 3000 кладем в банк. Что получается? Каждое общество заплатило нам по 6500 рублей. Всего 13000 рублей. И 3000 рублей в банке. Итого 16000 рублей. Заработали 1000 рублей. Ее мы отдаем на развитие образования. (Здесь Федор вспомнил похожую задачу, которая имелась в легенде и описана в нашей предыдущей книге, и улыбнулся.) Но губернатор считает, что надо в два раза увеличить расходы на образование. В соответствии с этим указанием мы решили, что будем в банк класть не 3000, а 5000. Теперь доход уже равен 3000 рублей. Так что мы даже перевыполняем указание губернатора.

58. Укажите математические ошибки, содержащиеся в этом примере.

После окончания торжественной части состоялся концерт. Перед самым началом в зале появился дедушка Гаврила. Ребята из математического лагеря исполнили хором свой гимн, а затем выступали с различными *номерами*. Среди них были и имеющие отношение к математике. Под первым *номером* на сцену по праву квашинского старожила вышел Федор.

59. *Угадывание числа, или постоянная Капрекара.* (Этот трюк Федор узнал от дедушки прошлым летом. Впрочем, слово «трюк» здесь явно не подходит. Ведь все происходит в строгом соответствии с законами математики.) Федор что-то написал на листке бумаги и положил его на стол на виду у всех. Затем он пригласил на сцену нескольких человек. На сцене была большая школьная доска. Федор разделил доску на несколько частей и предложил каждому написать какое-нибудь четырехзначное число, у которого не все цифры одинаковые. Затем из написанных цифр надо было составить два числа: у одного все цифры идут в порядке убывания, а у другого — в порядке возрастания, и вычесть второе из первого. С полученным четырехзначным числом (если знаков меньше, то надо спереди приписать нули) поступаем таким же образом. Такие действия надо продолжать до тех пор, пока не станет ясно, что дальше их продолжать не следует. Все принялись за работу. (Здесь, правда, произошло одно малозаметное событие, на которое обратил внимание, пожалуй, лишь дедушка Гаврила. Впоследствии эта наблюдательность сослужила ему хорошую службу.) И через некоторое время, ко всеобщему изумлению, у всех появилось одно и то же число. И именно это число оказалось написанным на листке, который Федор с торжеством показал всем сидящим в зале. Вы узнаете это число, если проделаете указанные операции с любым четырехзначным числом, у которого не все цифры одинаковы.

Расскажем еще немного о математических или почти математических номерах этого концерта, но не будем называть фамилии артистов. В конце концов, это не так важно.

60. *Быстрое сложение.* Выступающий вызывает на сцену трех человек.

Первый пишет на доске шестизначное число, а фокусник (назовем его так; а как иначе?) пишет под ним свое шестизначное число. Затем оба числа закрывают листом бумаги. Далее второй человек под первыми двумя пишет свое шестизначное число. Это число сразу же закрывают листом бумаги, так что фокусник не знает, какое число было написано. Затем третий пишет свое число, а фокусник под ним свое. Затем все пять чисел открывают и фокусник сразу же пишет, чему равна их сумма. Вот что получилось:

$$
\begin{array}{r}
231735\\
768264\\
+\,437321\\
804130\\
195869\\
\hline
2437319
\end{array}
$$

Не могли бы вы объяснить, в чем секрет этого фокуса?

Несколько фокусов с бумагой.

61. а) В листе бумаги, размером со страницу из ученической тетради, надо проделать отверстие, через которое свободно мог бы пройти человек. (Это известная головоломка, она встречалась уже в первой части истории про дедушку Гаврилу. Впрочем, все фокусы, которые показывали на концерте ребята, известны, хотя для читателя некоторые могут оказаться новыми.)

б) Фокусник отрывает от листа бумаги узкую полоску. И говорит: «Если бросить этот лист на пол, то он упадет на одну из сторон. А можно ли этот бросить так, что он упадет на ребро?» И затем показывает, как это можно сделать.

в) Фокусник ставит на стол два пустых стакана недалеко друг от друга (на расстоянии, равном примерно ширине листа бумаги), наполняет третий стакан водой и говорит, что он положит на два первых стакана лист из тетради, а на него поставит стакан с водой. При этом бумага будет удерживать стакан над столом.

Сможете ли вы проделать все эти фокусы?

62. *Загадочная таблица.* Фокусник изобразил на доске таблицу.

5	12	13	9	6
20	27	28	24	21
15	22	23	19	16
31	38	39	35	32
29	36	37	33	30

А на стол он положил листок, на обратной стороне которого он при всех написал некоторое число. Затем он пригласил на сцену четырех человек и предложил одному из них обвести любое число в таблице и вычеркнуть содержащие это число строку и столбец. После этого второй человек обвел какое-то из оставшихся чисел и вычеркнул соответствующие строку и столбец. Затем это же проделали третий и четвертый. В таблице осталось одно число. Зрителям было предложено сложить все обведенные числа и это последнее. И когда все было сделано, фокусник торжественно показал заранее написанное число. Оно совпало с полученной суммой. В чем секрет этого фокуса?

63. *Попробуй повторить.* Фокусник ставит на стол восемь стаканов и заполняет последние четыре водой. Потом он говорит, что надо переставить стаканы так, чтобы пустые и наполненные чередовались. При этом за один ход разрешается переместить два рядом стоящих стакана. После перемещения они должны по-прежнему стоять рядом. И сделать это надо за четыре хода. После этого он просит всех быть повнимательнее и показывает, как это можно сделать. Но запомнить и повторить его действия не так-то просто. Попробуйте найти самостоятельно, как за четыре хода можно осуществить нужную перестановку.

64. *Корень пятой степени.* Фокусник предлагает кому-нибудь из зрителей возвести в пятую степень произвольное двузначное число (можно с помощью калькулятора) и сообщить результат. После этого он практически сразу сообщает, какое число было возведено в пятую степень, то есть извлекает корень пятой степени. Объясните, каким образом фокусник находит нужное число? Представьте себе, что зритель

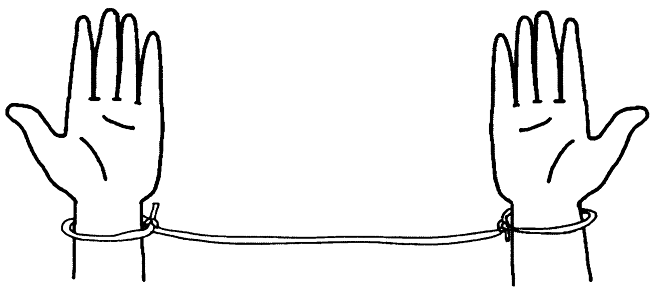


Рис. 11

сообщил фокуснику, что он получил число 6 435 343. Какое число он возводил в пятую степень?

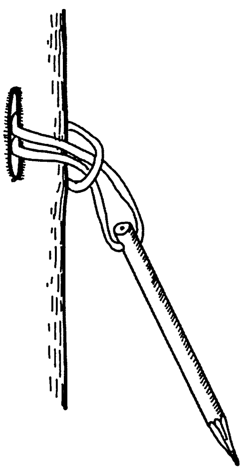


Рис. 12

65. *Узел на веревке*. Фокусник приглашает на сцену зрителя и завязывает на его руках веревку, как показано на рис.11. Затем он предлагает зрителю завязать на веревке узел, не снимая ее с рук. Как это сделать?

66. *Карандаш на веревочке*. Фокусник приглашает на сцену зрителя в пиджаке, подходит к нему и быстро прикрепляет к петле для пуговицы карандаш на веревочке (как показано на рис. 12). Затем он предлагает зрителю самостоятельно снять карандаш. Сделать это совсем не просто. Карандаш не проходит в веревочную петлю. Не могли бы вы объяснить, как снять карандаш? Ломать карандаш или рвать веревку нельзя. И уж тем более нельзя портить пиджак.

67. *Игра «ним»*. Игра «ним» (в чем состоит эта игра, чуть позднее) упоминалась в предыдущей книге про дедушку Гаврилу. Если вы помните, Нави сказал, что знает правило (как говорят математики, «алгоритм»), с помощью которого можно выигрывать в эту игру, если, конечно, выигрыш возможен. Но чтобы понять этот алгоритм, надо иметь соответствующие знания по математике, а чтобы быстро делать правильный ход, надо уметь быстро проводить нужные вычисления. Поэтому выступал на сей раз от имени ребят один из лучших математиков (хотя дедушка и не любил делить людей на «лучших» и «худших»).

Артист (на сей раз слово «фокусник» не очень подходит) пригласил на сцену зрителя и предложил образовать на столе несколько кучек из спичек (на столе лежало несколько спичечных коробков).

Сколько кучек и чему равно число спичек в каждой кучке, зритель определял сам. Требовалось, чтобы число кучек было не менее трех и в каждой кучке было достаточно большое число спичек (ну, конечно, не слишком много, иначе игра могла сильно затянуться). Правила игры были очень простыми. Играющие по очереди берут спички. За один ход разрешается взять любое число спичек из любой кучки. Выигрывает тот, кто возьмет последнюю спичку. Артист предложил зрителю определить, кто делает первый ход.

Вот как проходила первая игра. Зритель положил на стол три кучки (11, 7, 13) и решил сам начать игру. Вот как развивалась игра (буквой «з» — обозначаем ход зрителя, буквой «а» — ход артиста).

(11, 7, 13) → з → (11, 7, 12) → а → (11, 6, 12) → з → → (11, 6, 10) → а → (11, 1, 10) → з → (9, 1, 10) → а → → (9, 1, 8) → з → (5, 1, 8) → а → (5, 1, 4) → з → (5, 1, 2) → → а → (3, 1, 2) → з → (1, 1, 2) → а → (1, 1, 0) — и артист выиграл.

Конечно, самостоятельно найти выигрывающий алгоритм не только трудно, но даже невозможно (имея в виду обычного человека или школьника). Понять его вы сумеете, прочитав следующую главу.

Глава 7

О ЛЕТОИСЧИСЛЕНИИ В РАЗЛИЧНЫХ СЧИСЛЕНИЯХ

— Как вы все знаете, для записи чисел мы обычно используем так называемую *позиционную десятичную систему*.

Такое начало лекции немного удивило ребят. А где же привычная неожиданность, удивительная история или неожиданный вопрос, после которого у каждого открывается рот так, что в него может влететь не только ворона, но и целый страус? Если бы, конечно, страусы умели летать. Такого скучного и обычного начала никто не ожидал. А это означает, что дедушка остался верен себе. То есть неожиданность здесь и состоит в отсутствии неожиданности.

Признаться, один странный вопрос у дедушки возник еще накануне лекции. В этот день за завтраком, обедом и ужином давали разные фрукты: груши, яблоки и апельсины. И дедушка задумался: чем отличаются друг от друга груша, яблоко и апельсин?

«Так ведь они все *разного рода*!» — догадался вдруг дедушка. Но, к сожалению, никакого отношения к теме лекции этот вопрос не имел.

— Что это означает? — продолжил дедушка и немного задумался. — Вы знаете, очень трудно объяснять то, что общеизвестно. Того и гляди что-то упустишь. А может, этого и не надо делать — объяснять то, что все знают? Нет, надо! Это, конечно, немного скучно, но лишь после того, как мы научимся ясно и подробно разъяснить самим себе *общеизвестное*, можно идти дальше к *никомунеизвестному*. Правда, порой, когда объясняешь простые и понятные *вещи*, они перестают быть простыми и понятными. Однажды сороконожка задумалась, в каком порядке она передвигает свои ноги, то есть *ножки*, при ходьбе, и она не смогла двигаться. Но если мы хотим создать сороконожку-робота, нам надо точно понимать, как она движется. Только тогда мы сможем создавать и более сложные аппараты.

Но я несколько отвлекся, увлекся и ушел в сторону.

Что значит, что мы пользуемся позиционной системой счисления с основанием 10? Это означает, что для записи любого целого положительного числа мы используем ровно 10 цифр. Число записывается в виде последовательности, состоящей из этих цифр. (Можно даже говорить, что цифры — это буквы, образующие алфавит, а последовательности из цифр — слова в этом алфавите.) При этом вклад (или *вес*) каждой цифры (буквы) зависит от ее положения в этой последовательности, от *позиции*. Самая легкая — последняя цифра. Она берется с весом 1. Говорят, что это цифра единиц. Вторая с конца цифра берется с весом 10, то есть умножается на 10. Это цифра десятков. Затем, двигаясь с конца, мы получаем цифры сотен, тысяч, десятков тысяч и так далее. *Позиции* мы называем также *разрядами* (имеются в виду совсем не те *разряды*, которые бывают на войне или во время грозы). Получаются разряды единиц, десятков, сотен и так далее. Число равно сумме всех цифр записи числа, взятых со своим весом.

Можно представить, что у нас имеется ряд *кармашков*, идущих справа налево. В них мы последовательно вкладываем цифры от 0 до 9. По одной цифре в один кармашек. Так заполняем несколько кармашков. Получаем *десятичную запись* какого-то *натурального числа.* Читаем же это число мы, как и положено, слева направо.

Надеюсь, я ничего здесь не упустил. Например, $7605 = 7 \cdot 1000 + 6 \cdot 100 + 0 \cdot 10 + 5 = 7 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10 + 5$. Читаем: семь тысяч шестьсот пять.

Но мы можем рассматривать и другие *основания* для записи числа (хотя, конечно, чтобы записывать числа, особых *оснований* не требуется). При этом для записи любого числа по заданному основанию нам потребуется количество цифр-букв, равное его величине. Поэтому если основание меньше 10, мы можем пользоваться имеющимися цифрами. Веса же для каждого разряда равны соответствующей степени основания.

В восьмеричной системе мы можем использовать цифры 0, 1, 2, ..., 7. И веса для каждого разряда (двигаясь с конца) будут равными: $1, 8, 8^2, 8^3, \dots$.

Если же основание больше 10, придется придумывать новые цифры.

В двоичной системе любое число записывается с помощью двух цифр: 0 и 1. Это очень важная система. Она даже более важна, чем десятичная. В компьютерах используется именно двоичная система. И не только в компьютерах.

Да, чуть не забыл. Я думаю, все уже давно поняли, что 10 000 000 лет Квашино — это в двоичной системе. В десятичной системе это будет $2^7 = 128$ лет. Тоже немало. Впрочем, сейчас я *сморозил глупость.* (Я знаю, что значит это выражение, но объяснить его не могу.)

Как будто в двоичной системе число больше, чем в десятичной. Длина записи этого числа, конечно, больше, но само число не меняется.

Впрочем, хватит общих слов. Давайте перейдем к задачам.

68. Рассмотрим число $5678_{(9)}$. (Девятка справа внизу в скобках означает запись в девятеричной системе.) Как следует записать это число в обычной десятичной системе?

Это очень легко. Как говорят, по определению, имеем $5678_{(9)} = 5 \cdot 9^3 + 6 \cdot 9^2 + 7 \cdot 9 + 8 = \dots$.

69. Как перевести число 7259 в восьмеричную систему?

Сначала найдем цифру, стоящую на последнем месте, в разряде единиц. Для этого разделим наше число на 8 с остатком:

$$7259 = 907 \cdot 8 + 3.$$

Получается, что в разряде 1 в записи данного числа в восьмеричной системе стоит цифра 3. Чтобы найти вторую с конца цифру, надо разделить на 8 с остатком число 907. И так далее. В результате получим, что $7259 = {*}{*}{*}{*}3_{(8)}$.

Полагаю, все поняли, как арифметическая операция деление с остатком дает нам возможность записывать число в позиционных системах с различными основаниями.

70. Пусть каждый из наборов цифр 76, 354, 2736, 1 234 567 означает запись числа в системе с основанием, равным 10, 9, 8. Найдите запись этого числа в двух других системах. (Рассмотрите все возможности.)

Заметьте, что любое натуральное число может быть записано в любой системе и при этом *единственным* образом. Ведь мы получили правило, с помощью которого мы последовательно находим все цифры записи числа.

Именно так или почти так, шаг за шагом, по миллиметру математики строят свои теории, добираясь при этом до фантастических вершин.

71. Составьте таблицы умножения в восьмеричной, девятеричной и двенадцатеричной системах счисления.

Давайте немного подробнее обсудим двоичную систему. Мы уже говорили, что в этой системе используются лишь две цифры: 0 и 1. Число 110001011 при переводе из двоичной системы в десятичную есть $1+2+2^3+2^7+2^8=395$. Представить число в двоичной системе — это означает представить его в виде суммы степеней двойки. При этом 1 мы считаем «нулевой степенью двойки», $2^0=1$. И вообще, любое число, кроме 0, в степени 0 считаем равным 1.

В двоичной системе таблицы сложения и умножения состоят всего из трех равенств:

$0+0=0,\qquad 0+1=1,\qquad 1+1=10,$

$0\cdot 0=0,\qquad 0\cdot 1=0,\qquad 1\cdot 1=1.$

Хотя, если внимательно посмотреть на эти равенства, а смотреть надо всегда и на все только внимательно, то можно увидеть (а смотреть и видеть — далеко не одно и то же), что здесь лишь одно равенство, характеризующее именно двоичную систему: $1+1=10$. Ведь в любой системе счисления прибавление 0 и умножение на 1 не меняют величины числа, а при умножении на 0 получаем 0.

Все остальные правила сложения и вычитания, умножения столбиком и деления уголком остаются прежними.

72. Выполните действия в двоичной системе:
$10101001+1110010$, $1100101100-111111111$, $11001001\cdot 1010011$, $110111001:1001$.

Двоичная система используется и в науке, и в играх, и в фокусах. Представьте, что кто-то задумал число. Известно, в каких пределах заключено это число. Например, от 1 до 32. Вам его нужно угадать, задавая вопросы, на которые надо отвечать «да» либо «нет». Возникают два вопроса. Какие вопросы надо задавать? За какое наименьшее число вопросов наверняка можно угадать задуманное число?

Уф! Я совсем запутался в этих вопросах. Но надеюсь, вы разобрались. Можно, например, спросить: «Вы задумали число 15?» Конечно, может оказаться, что вы угадали с одного раза. Но скорей всего ответом будет «нет». И вам теперь надо угадывать задуманное число из 31 оставшегося. Так, перебирая по одному числу, в самом худшем случае вам придется задать 32 вопроса. Виноват, не 32, а 31. Ведь если вам 31 раз ответили «нет», то задуманным является оставшееся число. А что если спросить: «Вы задумали число от 1 до 15?»? Здесь также самым неудобным будет ответ «нет». В этом случае придется угадывать из 17 оставшихся. Если же вы спросите: «Задумано число меньше 20?» — то здесь наихудшим будет ответ «да». Давайте найдем вопрос (или вопросы), для которого наихудший ответ будет самым лучшим. Я услышал слово «пополам». Совершенно верно. Надо разбить наши числа на две равные группы. Можно задать вопрос: «Задумано число от 1 до 16?» Или: «Задумано четное число?» И другие. Получается, что при любом ответе, «да» или «нет», для задуманного числа останется 16 возможностей. Разделив эти 16 чисел вновь пополам, получим, что после двух вопросов останется 8 возможных чисел. Продолжая таким образом, мы наверняка угадаем задуманное число за 5 вопросов. Но при этом всегда именно за 5. Не меньше. Какое бы число не было задумано. Конечно, можно попробовать угадывать и иначе. И если повезет, вы сможете угадать и за меньшее число вопросов.

В ином случае количество вопросов может оказаться и бо́льшим.

Не знаю, как сегодняшняя молодежь, но мы в молодые годы любили играть в игру, которую можно назвать «Угадай личность». Один игрок задумывает какую-нибудь известную личность. Писателя, спортсмена или кого другого. А второй игрок должен угадать эту личность, задавая вопросы, предполагающие лишь ответы «да» или «нет». Требуется уложиться в 20 вопросов. При этом запрещается угадывать буквы фамилии. Конечно, в этой игре не так легко осуществить деление пополам. Разве что спросив: «Задуман мужчина?»

А при чем здесь двоичная система? А вот при чем. Если человек умеет записывать число в двоичной системе, то можно угадывать число следующим образом. Предложите записать задуманное число в двоичной системе. А затем последовательно можете угадывать цифры этого числа. Вам потребуется вопросов ровно столько, сколько цифр может содержать задуманное число. С помощью этого приема можно решить следующую достаточно трудную задачу.

73. Задумано число от 1 до 128. Как за 11 вопросов наверняка угадать задуманное число, если отвечающий имеет право один раз соврать?

Именно с помощью двоичной системы описывается правило (или алгоритм), как надо играть в игру «ним». Помните, как ваш товарищ ловко обыгрывал на юбилейном вечере всех желающих с ним сразиться? Я объясню это правило, хотя, признаться, сам не представляю, как можно было до него догадаться. Вы же сами убедитесь, что с помощью этого правила можно играть в игру «ним» наилучшим образом.

Прежде всего, будем называть «позицией» несколько кучек спичек. Все позиции делятся на две группы: «хорошие» и «плохие». «Хорошими» мы назовем позиции, в которых начинающий при правильной игре обязательно выигрывает. Значит, все другие позиции «плохие». Если вам досталась «хорошая» позиция, то вы должны сделать ход, переводящий ее в «плохую». Понятно, что «хорошей» является позиция, когда имеется всего одна кучка из любого числа спичек. Начинающий может одним ходом завершить игру и выиграть. Какие же позиции являются «хорошими», а какие соответственно «плохими»?

Давайте каждое число, указывающее количество спичек в кучке, напишем в двоичной системе и полученные числа запишем одно под другим. Цифры одного разряда должны быть записаны в одном столбце. В последнем столбце находятся цифры последнего разряда, в предпоследнем — предпоследнего и так далее. Возможно, что в некоторых столбцах будет цифр меньше, чем в других.

Если в каждом столбце количество единиц четно, то такая позиция «плохая». Значит, «хорошими» являются позиции, у которых существуют столбцы с нечетным числом единиц. Оказывается, любую «хорошую» позицию одним ходом можно перевести в «плохую». Как это сделать?

Покажу это на примере. Как вы помните, в первой игре, сыгранной на юбилейном вечере, перед первым ходом было три кучки из 11, 7 и 13 спичек. Переведем эти числа в двоичную систему и запишем одно под другим.

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

Как видите, позиция хорошая. Во всех столбцах, кроме последнего, четное число спичек. Чтобы перевести ее в «плохую», надо взять одну спичку из любого столбца. Что, кстати, и сделал зритель. Как говорится, *нечаянно*.

Давайте запишем начало игры в двоичной системе:

1011		1011		1011		1011		1011
111	$\to$з$\to$	111	$\to$а$\to$	110	$\to$з$\to$	110	$\to$а$\to$	1
1101	!!	1100		1100	?	1010	!!	1010

Как видите, первый ход зрителем (буква «з») сделан верно.

Артисту (буква «а») ничего не оставалось, как сделать какой-нибудь ход. Он взял одну спичку из средней кучки. И в этот момент зритель допускает ошибку.

74. Какой ход вместо хода, отмеченного знаком вопроса, должен был сделать зритель?

И теперь артист сделал единственный ход и оставил зрителю «плохую» позицию. Дальнейшее, как говорится, было *делом техники*.

75. Рассмотрим следующие позиции игры «ним»: (27, 18, 13, 6), (29, 15, 10, 8), (25, 21, 17, 13, 9, 5, 1). Какие из них «плохие», а какие «хорошие»? Укажите все правильные ходы в «хороших» позициях.

А в заключение я дам вам дюжину (кстати, дюжина, то есть 12, была бы очень хороша в качестве основания для системы счисления, ведь 12 делится на 2, 3, 4 и 6) задач по арифметике.

76. Рассмотрим 6 чисел (здесь можно сказать и «цифр») 1, 2, 3, 4, 5, 6. Между ними можно вписывать скобки и знаки арифметических действий (стерев, конечно, запятые). При этом получаются различные числа. Мне удалось получить все числа от 1 до 57. Например:

$1 + 2 + 3 - 4 + 5 - 6 = 1;$

$(1 + 2) \cdot 3 \cdot 4 - 5 + 6 = 37;$

$(1 + 2) \cdot 3 + 4 + 5 \cdot 6 = 43;$

$1 + 2 + 3 \cdot 4 \cdot 5 - 6 = 57.$

Получите оставшиеся числа от 1 до 57. Может, вы сможете продолжить этот ряд?

77. Сократите следующие дроби или докажите, что сокращение невозможно:

$$\frac{988027}{999919};\ \frac{12345678887654321}{12345678987654321}.$$

78. На столе лежат спички. Играют двое. Они по очереди берут спички. За один ход разрешается взять не более 5 спичек. Выигрывает тот, кто возьмет последнюю. Кто выигрывает при правильной игре — начинающий игру или второй игрок, если количество спичек на столе равно 37? Эта игра простая. Но эта игра становится значительно более сложной, если добавить одно ограничение: запрещается повторять ходы противника. Кто на этот раз выигрывает при правильной игре, если количество спичек на столе равно 7, 13, 20, 26, 33 и 37?

79. Найдите наименьшее натуральное число, которое при делении на 3, 4, 5 и 6 дает в остатке 2.

80. Найдите наименьшее натуральное число, квадрат которого начинается на 111... .

81. Не пользуясь калькулятором с функцией извлечения корней, найдите натуральное число, куб которого равен: а) 985 074 875, б) 999 700 029 999.

82. Не пользуясь калькулятором и не умножая пятизначное число на шестизначное, сравните, какая дробь больше:

$$\frac{331999}{31999} \text{ или } \frac{220999}{20999}.$$

83. Имеется 80 монет. Одна из них фальшивая и легче других. Как за четыре взвешивания на весах без гирь определить фальшивую монету? (Одним взвешиванием мы можем сравнить два набора монет.)

Обращаю ваше внимание, что в данном случае деление пополам, как при угадывании задуманного числа, не является лучшим способом.

84. А вот задача на взвешивание, но потруднее. Имеется 12 монет. Одна из них фальшивая. Но на этот раз неизвестно, легче она или тяжелее остальных. Известно только, что ее вес отличается от веса правильных монет. Как за три взвешивания на весах без гирь найти фальшивую монету?

85. Ученик написал на доске три натуральных числа, образующих арифметическую прогрессию (это означает, что разности двух соседних равны). Потом стер разделяющие их запятые. Получилось семизначное число. Какова наибольшая величина этого семизначного числа?

86. Имеются 10 монет и три бумажных одноразовых стаканчика. Требуется разложить эти монеты по стаканчикам так, чтобы в каждом лежало нечетное число монет.

87. Имеется калькулятор, который может из данного целого числа a получить либо число $2a + 1$, либо число $\frac{1}{3}(a - 1)$, если $a - 1$ делится на 3. Например, из числа 5 можно получить лишь 11, а из 10 либо 21, либо 3. Постарайтесь с помощью таких операций из 1 получить 8, а также 32.

Глава 8

ПОХИЩЕНИЕ «ЧЕРНОГО КВАДРАТА»

Еще зимой произошло одно событие, на которое дедушка поначалу не обратил никакого внимания. А зря. Тогда, возможно, ему впоследствии не пришлось бы решать трудные проблемы, совсем не связанные с математикой. Дело в том, что дедушку посетил странный человек. Он очень не понравился Навуходоносору и Клеопатре (так звали собаку и кошку, которые жили у дедушки). Дедушке он также не очень понравился, но по опыту своей жизни дедушка знал, что первое впечатление нередко бывает обманчивым.

Не станем описывать этого человека. Во-первых, честно говоря, автор его сам не видел. И представляет его в самых общих чертах. А во-вторых, представьте себе, что автор сумеет детально описать нехорошего человека, а читатель вдруг где-нибудь встретит человека, на него похожего. И сразу решит, что перед ним нехороший человек. Что получится? А нехорошо получится. И, наконец, в-третьих, описывать нехорошего человека — небольшое удовольствие. Куда приятнее рассказывать о человеке хорошем.

Посетитель сразу стал интересоваться дедушкиными картинами и, главным образом, «Черным квадратом». Он задал кучу вопросов: правда ли, что это картина того самого известного художника? правда ли, что эта картина стоит несколько миллионов долларов? не собирается ли Гаврила Терентьевич продать картину? сколько он хочет за эту картину?

И другие вопросы. При этом человек фотографировал картину с самых разных точек, под разными углами и с разных расстояний.

На все вопросы дедушка ответил коротко. Да, картина того самого известного художника. Говорить о ее стоимости бессмысленно, поскольку картина *бесценна* (то есть не имеет цены) и не продается.

А теперь вновь вернемся в наш математический лагерь. Однажды кто-то из ребят вошел в Комнату размышлений и не увидел на стене картины «Черный квадрат». Вместо нее висел большой лист бумаги, на котором было написано вверху:

НЕ СПЕШИТЕ ИСКАТЬ КАРТИНУ.
У ВАС ВСЕ РАВНО НИЧЕГО НЕ ВЫЙДЕТ.
КАРТИНА ВЕРНЕТСЯ В ТОТ МОМЕНТ,
КОГДА ВЫ ЗАКОНЧИТЕ РЕШЕНИЕ ПОСЛЕДНЕЙ
ИЗ НАПИСАННЫХ НИЖЕ 20 ЗАДАЧ.
ГЛАВНОЕ УСЛОВИЕ: ЗАДАЧИ ДОЛЖНЫ БЫТЬ
РЕШЕНЫ ДЕТЬМИ БЕЗ ПОМОЩИ ВЗРОСЛЫХ.

Далее следовал список из 20 задач, который приведен в конце этой главы.

Когда в комнату пришел дедушка, то он, как ни странно, не очень расстроился. Вначале у него, возможно, мелькнула мысль: «Хорошенькое дело!» Хотя выражение «хорошенькое дело» обычно означает, что дело не очень-то хорошее. Дедушка подумал, что это чей-то розыгрыш. Какой это розыгрыш, добрый или злой (вы, конечно, понимаете, что розыгрыши бывают и добрыми, и злыми, и некоторые розыгрыши, которыми так любят восторгаться некоторые люди, скорее злые, чем добрые), было неясно. Но дедушку заинтересовали задачи. Даже на первый взгляд было видно, что в списке много интересных и трудных задач. Это был вызов, и дедушка его принял.

Ребята, молча стоявшие вокруг дедушки, заметив, что он не очень расстроен, также решили, что это все розыгрыш и проверка для них. А придумал все это сам дедушка Гаврила. И они с большим энтузиазмом сразу же принялись решать задачи из списка.

Задачи, предложенные похитителем «Черного квадрата», оказались *не очень* и даже *очень не* простыми. И прошла неделя, прежде чем ребята с радостными криками примчались к дедушке. Все задачи решены! Ура! Не будем никого выделять и выяснять, кто принес больше пользы. Конечно, занятия математикой, решение математических задач — дело индивидуальное. Но в данном случае успех был общим и радость была общей.

Когда дедушка проверил решения и согласился с тем, что задачи решены верно, они все вместе — ребята и дедушка — направились в Комнату размышлений. Но на стене по-прежнему висел список задач. Картины не было.

Но в этот момент в дверях столовой появился повар. Он крикнул, чтобы ребята срочно бежали в столовую.

Когда через несколько секунд ребята очутились в столовой, они сразу увидели на стене «Черный квадрат». Тут подошел немного запыхавшийся дедушка. Ребята расступились, пропуская его вперед.

Дедушка медленно шел к картине, но чем ближе он к ней подходил, тем сильнее его охватывало предчувствие недоброго. И когда дедушка подошел к картине вплотную, он понял, что это не та картина. Настоящая картина была теплой и живой, на стене же висела холодная и мертвая копия.

«Надо взять себя в руки, — приказал себе дедушка. — Нельзя, чтобы ребята поняли, что случилось. Потом все обдумаю».

Конечно, кто-то из ребят заметил дедушкино огорчение. Но молодость не всегда внимательна. И дети, сняв картину со стены, направились к Комнате размышлений, чтобы вернуть картину на свое место. А дедушка незаметно свернул в сторону и отправился к себе. Думать. Умение думать ведь и является самой главной профессиональной чертой математика.

Надо сформулировать главные вопросы и попытаться на них ответить. И первым возник вопрос: почему похититель использовал такой сложный способ? Не проще ли было сразу подменить подлинник копией?

Понятно, похитителю нужно было выиграть время. Тот, кто спланировал похищение, оказался неплохим психологом. Он прекрасно понимал, что красивые математические задачи — это то, на что дедушка обязательно клюнет. Кроме того, дедушка — человек доверчивый и примет все за розыгрыш. (Так все и случилось.) Вероятно также, похититель не имел возможности сразу вывезти картину из лагеря. И если бы быстро заметили подмену, то тут же начались бы и поиски картины.

И дедушка вспомнил странного посетителя, который фотографировал картину с разных сторон. Но тот не знал, не мог знать, как выглядит картина сзади. Поэтому очень возможно, что всю эту неделю похититель (или похитители) дорабатывал подделку, стараясь сделать ее неотличимой от подлинника со всех сторон.

Все это давало надежду, что картина все еще находится неподалеку. Преступник спокоен. Его план удался. Надо постараться его не спугнуть.

Действовать придется самостоятельно. Обращаться в полицию уже поздно. Возникнут неудобные вопросы: почему он не пришел в полицию сразу, почему он уверен, что вернули копию, а не подлинник? И другие. А времени мало.

Далее возник самый главный вопрос: кто похитил картину? Понятно, что это был человек, постоянно живущий в лагере.

Получилось так, что на последний вопрос дедушка ответил почти сразу, ответ ему подсказала *интуиция*. Этот человек, обозначим его буквой Y («игрек»), на которого ему указала интуиция, работал в столовой. Он как-то сразу не понравился дедушке. Дедушка вспомнил его странное поведение во время представления на юбилейном вечере. Именно Y был несколько раз покусан пчелами. «Наши пчелы не станут кусать кого попало, это неспроста», — подумал дедушка.

Однако дедушка, как человек честный и добросовестный, как ученый, владеющий *методом*, не ограничился одной интуицией, а стал искать доказательства.

Воспользовался он так называемым *методом от противного*. Следует признаться, что этот метод дедушка не то чтобы не любил, а немного *недолюбливал*. Ну, чего тут хорошего, если метод прямо так и называется — *от противного*. Куда приятнее пользоваться методом *от приятного*. Но это, как говорится, *эмоции*, и метод здесь ни при чем. А суть метода вот в чем. Допустим, нам надо доказать некоторое утверждение. Предположим, что это утверждение неверно. То есть предположим *противное*. Будем делать из этого предположения выводы. И если получим противоречие, то это будет означать, что наше предположение неверно. А верно *противное* сделанному предположению. То есть верно утверждение, которое требовалось доказать. (Вы всё поняли?)

Надо бы здесь привести хороший пример. Но ничего в голову не приходит, кроме странного рассуждения одной маленькой девочки, которое подслушал известный английский сказочник и математик Льюис Кэрролл, автор сказок про девочку Алису.

— *Как хорошо, что я не люблю спаржу. Ведь если бы я ее любила, мне бы пришлось ее есть. А я ее терпеть не могу.*

А вы, кстати, любите спаржу? Если, конечно, знаете, что это такое и когда-нибудь ее ели. И вообще, можно ли любить или не любить что-то, если не знаешь, что это такое?

Дедушка составил полный список взрослых людей, работающих в лагере или постоянно бывающих в нем. Понятно, что себя и Моцарта Савельевича он в этот список не включил. (Это было бы просто глупо.) Постепенно дедушка вычеркивал из списка одного человека за другим (не будем перечислять причины, по которым он это делал), пока там не остался один человек. Таким образом, дедушка *доказал*, что из всех людей, включенных в список, похитителем может быть только человек *Y*.

Тут дедушка вспомнил, что как раз сегодня этот человек подходил к нему с просьбой отпустить на пару дней в Москву. Это было *косвенным* доказательством, что картина еще в лагере. Но надо спешить. До отъезда подозреваемого оставался один день.

Постепенно у дедушки начал вырисовываться план. «Вы подшутили над нами, теперь наш черед шутить».

...На следующий день вечером в лагере случился пожар.

Чтобы не пугать читателя, сразу скажем, что пожар был учебный. Но то, что этот пожар учебный, знали лишь дедушка и еще несколько человек.

Дедушка решил провести учения. Как вести себя во время пожара, как бороться с паникой и прочее и прочее. Понятно, что если с самого начала все знают, что этот пожар учебный, что это игра, результат учений будет невелик.

Итак, вечером следующего дня, когда ребята уже легли спать, в лагере случился пожар. Загорелся сарай неподалеку от столовой.

При первых сигналах тревоги ребята выскочили на улицу. К удивлению взрослых, никакой паники не было, а даже наоборот — ребята были веселы, но немного возбуждены. Пожар воспринимался как интересное приключение или даже очередной розыгрыш. Пока огонь далеко, ребят попросили вынести из своих комнат наиболее ценные вещи. Принесли также картины и аппаратуру из Комнаты размышлений.

Взрослые люди, жившие неподалеку от горевшего сарая, принесли чемоданы и сумки со своими вещами. Дедушка внимательно наблюдал за известным нам человеком *У*. Тот выскочил из своей комнаты с объемистой сумкой и поставил ее за кучей чемоданов, ближе к лесу. Тут подъехала пожарная машина и все, кроме дедушки, отправились помогать.

Дедушка подошел к сумке. С левого бока что-то выпирало. Дедушка дотронулся и сразу понял: это угол рамы от картины, его картины. За много лет знакомства он мог узнать свою картину даже на ощупь, даже через плотную ткань сумки. Осталось немного: заменить картины. В сумку положить копию, а себе взять оригинал.

Конечно, такой поступок не совсем соответствовал дедушкиным принципам. Но в данном случае в противоречие пришли разные принципы. Приходилось выбирать, и выбор был очевиден.

Но в этот момент дедушка заметил, что на сумке имеется замок. Замок кодовый, с шифром. Шифром являлось четырехзначное число. Как быть?

Дедушка задумался. Как математик, он обладал прекрасной памятью на числа. Не то чтобы феноменальной, но...

Он вспомнил. Когда Федор на юбилейном концерте демонстрировал фокус с числом Капрекара, среди людей, вышедших на сцену, был и хозяин сумки. И когда было предложено написать на доске четырехзначное число, этот человек быстро написал некоторое число, но затем сразу же его стер и написал совсем другое. Что же он написал? Дедушка вспомнил, что написанное число сразу привлекло его внимание. Оно было как-то связано с великим русским писателем Львом Толстым и e.

Что такое e? Это одно из двух самых важных в математике чисел. И не только в математике, но и вообще в науке. А возможно, и во всей вселенной. Другое число — это π, равное отношению длины окружности к ее диаметру. В отличие от π, объяснить, как и где возникает число e, не так просто. В десятичной записи число e равно 2,718281828... Здесь указано 9 цифр после запятой. Дедушка же помнил наизусть 20 цифр после запятой. Само же число e выражается *бесконечной* последовательностью цифр. Вы, конечно, знаете, что 1828 — это год рождения Льва Толстого. То, что число e буквально *первым делом* сообщает нам год рождения Льва Толстого и даже делает это дважды, можно рассматривать как подтверждение всемирного величия этого писателя.

Дедушка вспомнил, что число, написанное хозяином сумки на доске, первоначально являлось перестановкой первых четырех цифр десятичной записи числа e: 2, 7, 1, 8 и было *близко к Льву Толстому*. Кажется, 1827!

Дедушка набрал на замке число 1827. Замок открылся.

Здесь у читателя может возникнуть естественный и резонный вопрос. А что бы делал дедушка, если бы был другой замок, или же код оказался другим, или же?.. Мало ли что могло произойти. Конечно, все предусмотреть трудно. Конечно, у дедушки было разработано несколько планов на разные случаи. На этот раз все произошло *как нельзя* более удачно. Но *нельзя* рассчитывать *на удачу*, если действовать только *наудачу*. Удача, как известно, любит настойчивых и наблюдательных.

...На то, чтобы поменять местами копию и подлинник, ушло несколько минут.

Дело сделано.

Вскоре пожар был потушен. Ребята вернулись в свои спальни. Конечно, заснуть сразу никто не смог. Но вскоре молодость и усталость взяли свое. Все затихли.

ДВАДЦАТЬ ЗАДАЧ, КОТОРЫЕ БЫЛИ ОБНАРУЖЕНЫ НА ТОМ МЕСТЕ, ГДЕ ВИСЕЛА КАРТИНА «ЧЕРНЫЙ КВАДРАТ»

88. Расставьте скобки так, чтобы значение выражения $2:2-3:3-4:4-5:5$ было бы больше 49. (Никаких новых арифметических действий добавлять нельзя.)

89. Чему равна сумма $\frac{1}{1 \cdot 2}+\frac{1}{2 \cdot 3}+\ldots+\frac{1}{99 \cdot 100}$?

90. На рис. 13 изображены вид спереди и сверху некоторого тела (никаких невидимых линий нет). Для каждой пары придумайте какое-нибудь тело, имеющее указанные виды спереди и сверху.

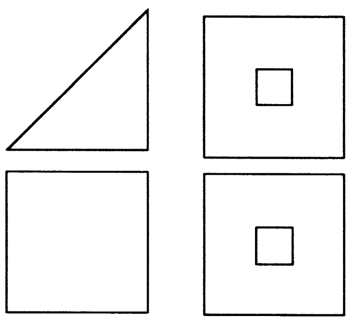


Рис. 13

91. Две старушки как-то поутру одновременно вышли каждая из своей деревни и отправились навстречу друг другу. Они встретились в полдень, то есть в 12 часов дня. Каждая продолжила путь в том же направлении, пока не достигла соседней деревни. Одна из них закончила свое путешествие через 2 часа после встречи, а другая — через 4 с половиной. Спрашивается: когда старушки отправились в путешествие? (Эту задачу, правда

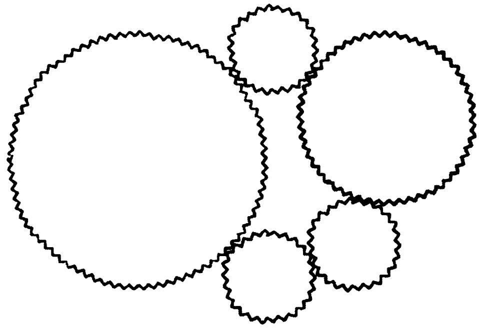


Рис. 14

с несколько иными числами, любил приводить в качестве примера известный российский математик Владимир Арнольд, когда рассказывал о своих школьных годах.)

92. Пять шестеренок, расположенных так, как показано на рис. 14, не могут вращаться. А можно ли расположить 101 шестеренку таким образом, чтобы каждая была зацеплена ровно с двумя соседними и так, чтобы при вращении одной шестеренки все остальные также вращались бы?

93. Расстояние от автобусной станции до дома, где живет Петя, равно 3 км. Петя вышел из автобуса и пошел домой со скоростью 3 км/ч. В этот момент к нему на нос села муха. Муха полетела по направлению к Петиному дому. Долетев до дома, она тут же повернула и полетела к Пете. Сев ему на нос, она вновь повернула и полетела к дому. Так продолжалось до тех пор, пока Петя не пришел домой. Сколько километров пролетела муха, если по направлению к дому она летела со скоростью 20 км/ч, а обратно — со скоростью 14 км/ч (дул ветер по направлению к Петиному дому)?

94. Вася, Боря и Толя играли в шахматы на вылет: проигравший выбывал (в случае ничьей выбывал игравший белыми фигурами) и пропускал одну партию. После окончания всех игр выяснилось, что Вася сыграл 15 партий, Боря — 9 партий, а Толя — 14 партий. Кто играл в 13-й партии?

95. Можно ли провести в пространстве шестизвенную ломаную, чтобы она проходила через все вершины куба?

96. Из клетчатой бумаги вырезан прямоугольник 7×8. Разрежьте этот прямоугольник на многоугольники, каждый из которых составлен не более чем из 5 клеток (разрезы должны идти по линиям на бумаге), так, чтобы общая длина разрезов была бы наименьшей.

97. Найдите $\sqrt{12345678987654321}$. (Надо найти число, квадрат которого равен 12345678987654321.)

98. В школе проходили спортивные состязания. В соревнованиях по легкой атлетике участвовало 100 человек, в соревнованиях по плаванию — 50, по стрельбе — 48. Когда учеников спросили, в скольких соревнованиях они участвовали, то ответ «в двух» дали вдвое меньше человек, чем ответ «в одном», а ответ «в трех» — втрое меньше, чем в одном. Сколько всего учеников участвовало в соревнованиях?

99. Неподалеку от маленького тихого города с простым названием Мэдтаун имеется 16 расположенных в ряд пещер. Местному шерифу, которого жители уважительно прозвали Большой Лоб, стало известно, что в одной из пещер прячется Неуловимый Джо. Более того, шерифу сообщили, что по рекомендации своих друзей Неуловимый Джо решил каждую ночь перемещаться в соседнюю пещеру. Шериф со своими помощниками может за один день обследовать одну пещеру. Может ли шериф наверняка выполнить указание губернатора штата и поймать преступника до конца мая, если обыскивать пещеры он может начать 1 мая?

100. Учитель предложил двум ученикам изобразить на доске параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ($ABCD$ — одна из граней параллелепипеда, AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 — его ребра) и отметить буквами M и N середины ребер BB_1 и CD. Том и Билл

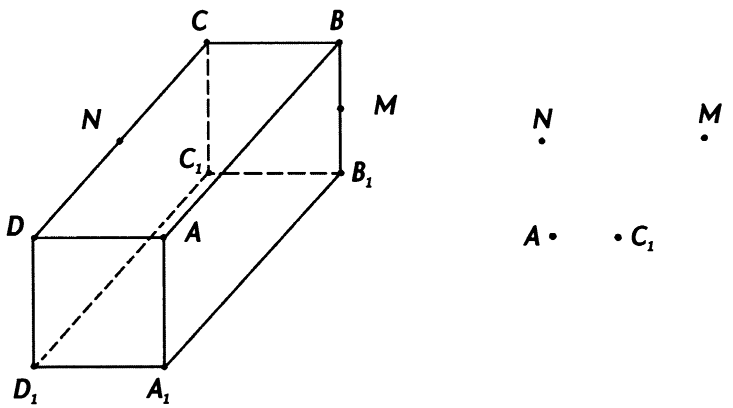


Рис. 15

сделали это. После чего учитель стер чертеж Билла, оставив лишь четыре точки A, C_1, M и N. На нашем рис. 15 изображен параллелепипед Тома и то, что осталось от параллелепипеда Билла. Восстановите чертеж Билла.

101. В конференции участвовало 100 человек – химиков и алхимиков. Участникам конференции был задан вопрос: «Если не считать вас, то кого больше среди остальных участников – химиков или алхимиков?» Первые 50 человек ответили, что алхимиков больше. Известно, что алхимики всегда лгут, а химики всегда говорят правду. Сколько химиков среди участников конференции?

102. Джон, Билл и Ваня отправились на бейсбольный матч. По дорогое Джон купил 5 пакетиков чипсов, Билл – 2 пакетика таких же чипсов, а Ваня ничего не купил. Во время матча они съели все чипсы, причем съели поровну. После матча Ваня, подсчитав, сколько стоят съеденные им чипсы, отдал 1 доллар и 40 центов. Какую сумму следует вернуть Джону?

103. Три землекопа копали канаву. Сначала первый землекоп проработал половину того времени, которое необходимо двум другим, чтобы выкопать всю канаву. Затем второй проработал половину того времени, которое необходимо двум другим, чтобы выкопать всю канаву. И, наконец, так же поступил третий землекоп. В результате через 2 часа 30 минут канава была выкопана. Сколько времени понадобилось бы землекопам на рытье канавы, если бы они всё время работали втроем?

104. Расположите в пространстве 8 треугольных пирамид так, чтобы любые две соприкасались по куску грани.

105. Имеется 4 треугольника, в которых написаны числа от 1 до 4; 4 четырехугольника с такими же числами; 4 таких шестиугольника и 4 круга. Расположите эти фигуры так, чтобы они образовали квадрат 4×4 (4 ряда и 4 столбца, в каждом 4 фигуры) и в каждом ряду и каждом столбце встречались по одному разу фигуры всех видов и каждое число от 1 до 4.

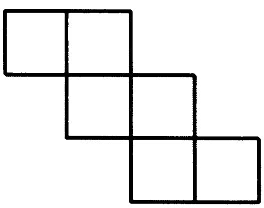


Рис. 16

106. Нетрудно убедиться, что состоящая из 6 квадратов фигура, изображенная на рис. 16, является разверткой поверхности куба. Оклейте поверхность в 2 раза большего куба четырьмя такими развертками.

107. Встретились как-то два друга-математика – Алгоритмиков и Воображайлин (A и B). Когда-то они вместе учились в университете. Приведем странный диалог, который произошел между ними.

А:

— Как твоя семья? Кажется, ты женился на студентке с нашего курса. Вы по-прежнему вместе? А дети у вас есть?

В:

— Да! Мы с тех пор не расстаемся. У нас трое детей, три мальчика.

А:

— А сколько им лет?

В:

— Если перемножить их возрасты, то получится число, равное моему возрасту.

А (*думает некоторое время*):

— Не понимаю.

В:

— Ну, если сложить их возрасты, то будет... будет число, равное числу окон во-он в том доме.

А (*задумывается*):

— Опять не понимаю!

В:

— Добавляю, что средний мой сын уже интересуется математикой!

А:

— А-а-а! Понял.

Не могли бы и вы сказать, сколько лет каждому из сыновей? Для облегчения решения добавим, что оба друга ровесники и моложе 50 лет.

Глава 9

СЛУЧАЙНЫЕ ЗАКОНОМЕРНОСТИ И ЗАКОНОМЕРНЫЕ СЛУЧАЙНОСТИ

— Ответьте на вопрос: что должен иметь футбольный судья, выходя на поле? — так начал дедушка свою очередную лекцию.

— Свисток.

— Желтые и красные карточки.

— Часы.

— Все верно! А что еще? Вспомните, как начинается футбольный матч. Сначала разыгрывают...

— Монету!!!

— Верно! Он должен иметь монету. Сначала судья с помощью монеты *бросает жребий*. То есть он бросает монету, а вместе с ней и жребий. Монета имеет две стороны. Их называют «орел» и «решка». Капитаны команд выбирают орла или решку. Судья бросает монету... И так далее.

Монету нередко используют в различных азартных играх. На Руси раньше часто играли «в орлянку». Признаюсь, я очень не люблю азартные игры, — продолжал дедушка Гаврила, — и все-таки должен сказать, что азартные игры имеют некоторое отношение к математике. Именно благодаря им в математической науке возник очень важный раздел «Теория вероятностей». Я, кстати, предпочитаю именно такое название, хотя иногда этот раздел называют «Теория вероятности». В единственном числе. Я не буду рассказывать вам историю возникновения и развития этой важной науки. Да я и не очень хорошо ее знаю. Я имею в виду историю, конечно.

Сегодня теория вероятностей используется в экономике и строительстве, в сельском хозяйстве и торговле, в... Одним словом, везде, где есть хоть сколько-нибудь науки.

Теория вероятностей изучает законы, которым подчиняются случайные события.

Не кажется ли вам это странным? Случайные события на то и случайные, чтобы не подчиняться каким-то законам. И все-таки.

И все-таки. Давайте проверим.

Здесь в классе вместе со мной присутствуют 29 человек. Как вы думаете, найдутся ли среди нас два человека, которые отмечают свой день рождения в один и тот же день? Велика ли вероятность, что такие два человека найдутся?

Похоже, вы полагаете, что это маловероятно. Но это не так.

Оказывается, в группе из 28 – 30 человек, как утверждает теория вероятностей, обычно есть два человека, у которых совпадают дни рождения. Давайте проверим. Вот листок бумаги. Пусть каждый на этом листе укажет свой день рождения.

Итак, — продолжал дедушка, — теория вероятностей имеет дело со случайными событиями. Что это такое: *случайное событие*? Это событие, которое может либо произойти, либо не произойти.

Причем заранее и наверняка утверждать, произойдет оно или нет, невозможно. Хотя некоторые из них более вероятны, другие менее вероятны. Возможно ли, что наша сборная по футболу станет чемпионом мира? Возможно, но очень маловероятно. А возможно ли, что в июне следующего года в Москве будет гроза? Не только возможно, но и даже очень возможно, почти наверняка. Хотя всякое может случиться.

В теории вероятностей, кроме случайных, выделяют еще два события: *невозможное* и *достоверное*. Понятно, что невозможное — это событие, которое не может произойти никогда, а достоверное — которое не может не произойти. Которое обязательно произойдет. Ну, например, рассмотрим игральный кубик. На его гранях изображены числа от 1 до 6. Рассмотрим такое событие: после бросания игрального кубика выпало число 7. Это событие, очевидно, невозможное.

А вот то, что выпавшее число меньше 10, — это событие достоверное. Невозможное событие имеет вероятность 0, а достоверному событию мы приписываем вероятность 1. Вероятность случайного события есть положительное (лучше сказать — неотрицательное) число от 0 до 1. Да, кстати, как там результаты нашего опроса?

Дедушка взял в руки листок, который, сделав круг по классу, вернулся к нему.

— Гм-м. Кажется, совпадений нет. Ну что же, бывает!

В этот момент в дверь заглянуло странное лохматое существо, которое, похоже, просто ошиблось дверью.

— Извините, молодой человек, — обратился к нему дедушка. — Не могли бы вы сказать... то есть, виноват, скажите, пожалуйста, день вашего рождения.

Это существо и в самом деле оказалось человеком, причем именно молодым, хотя и обращение «молодой человек» к нему не подходило. Это была молодая барышня. Немного удивленная, после некоторого размышления барышня ответила на вопрос.

— Спасибо! Вы спасли науку! — радостно воскликнул дедушка, обнаружив в списке такую же дату. — Наука — великая вещь! К этой задаче мы еще вернемся, а сейчас я замечу: вероятность того, что в группе из 30 случайно собранных человек найдутся двое, празднующие свой день рождения одновременно, достаточно велика и равна примерно 0,9.

Понятно, что случайное событие происходит (или не происходит) в результате какого-то действия. Человека, животного, природных сил. Как говорится, под лежачий камень вода не течет. Такое действие иногда называют случайным испытанием. В математической литературе чаще всего рассматривают только три вида случайных испытаний. И поэтому при решении различных задач, практических или не очень практических, полезно научиться видеть в них одну из таких стандартных ситуаций.

Я не буду дальше строить теорию теории вероятностей, а рассмотрю несколько важных примеров.

а) Выпадение орла или решки — два случайных события, которые могут произойти в результате бросания монеты. (Понятно, что на ребро обычная монета в обычных условиях встать не может.)

Если монета правильная и бросают ее «правильно» (то есть «честно»), оба события равновозможны или равновероятны. И мы приписываем каждому из них вероятность, равную $\frac{1}{2}$. Это, в частности, означает, что если долго бросать монету, то отношение числа выпавших орлов (или решек) к числу испытаний (или *бросаний* — а как сказать иначе? — монеты) будет близко к $\frac{1}{2}$. Это отношение будет приближаться (*стремиться*) к $\frac{1}{2}$ с ростом числа испытаний.

Итак, *бросание монеты* — один из любимых видов, а возможно, и самый любимый вид занятий математиков, изучающих теорию вероятности.

Правда, бросают они ее не на самом деле, а *умозрительно*.

б) Почти таким же важным, как монетка, персонажем теории вероятностей является игральный кубик. О нем мы уже вспоминали. Напомню, что на гранях игрального кубика написаны числа от 1 до 6. При этом суммы очков на любых двух противоположных гранях равны между собой и равны 7. И если кубик «правильный» (у него правильная форма, не смещен центр тяжести и пр.), то вероятность выпадения любого числа от 1 до 6 равна $\frac{1}{6}$. И при долгом бросании такого кубика каждое число выпадет приблизительно в $\frac{1}{6}$ случаев.

в) И еще математики любят извлекать шары из ящика, который называют *урной*.

108. В урне лежат 10 шаров, из которых 3 белых и 7 черных. Из урны наугад вынимают один шар. Какова вероятность, что этот шар — белый?

Это типичная и простейшая задача на тему «шары в урне». Я думаю, что все без труда ответят на поставленный вопрос.

Что же получается? При бросании монеты мы имеем 2 равновозможных исхода. При бросании кубика — у нас 6 равновозможных исходов. В случае с шарами в урне число исходов равно числу шаров. Это значит, что все шары, даже имеющие один цвет, считаются различными. В каждом случае вероятность одного исхода считается равной дроби $\frac{1}{n}$, где n — общее число исходов.

109. Чему равна вероятность того, что в результате бросания игрального кубика выпадет число, делящееся на 3?

Вы легко решите эту задачу. А мы запишем общую формулу, так называемую *классическую* формулу для вероятности некоторого события, которое мы обозначим через A:

$$P(A)=\frac{m}{n},$$

где n — общее число исходов, а m — число исходов, составляющих событие A.

Итак, вероятность заданного события («пэ от A») равна дроби, знаменатель которой равен общему числу равновозможных исходов, а числитель равен числу исходов, составляющих событие A. Мы говорим «вероятность события A», но правильнее было бы так: «вероятность того, что событие A произойдет».

Посмотрите еще раз на задачи 108 и 109 с точки зрения последней формулы.

110. В урне лежат шары: 4 черных и 7 белых. Все шары один за другим извлекаются из урны. Какова вероятность того, что 5-й шар черный? Какова вероятность того, что последний шар белый?

111. Представьте, что вы пришли сдавать экзамен. Какие-то вопросы вы знаете лучше, а какие-то хуже. Перед началом экзамена составляют список, в каком порядке ученики будут сдавать экзамен. Когда лучше идти сдавать экзамен, в начале или в конце? Зависит ли вероятность вытащить тот или иной билет от вашего места в списке?

112. Вероятность события A равна 0,7. Какова вероятность того, что событие A не произойдет?

А вот задача потруднее.

113. Вася пришел в гости к своему другу Коле на день рождения. Всего в гости к Коле пришло 10 человек. Мама Коли наугад рассаживает ребят (а их, как вы понимаете, 11 человек) за круглым столом. Васе очень хочется оказаться рядом с девочкой Машей. Какова вероятность этого события?

Здесь важно начать правильно рассуждать. Стол круглый, и все места за ним одинаковы. Пусть Маша займет какое-то место. Осталось 10 свободных мест. Из них нам подходят 2. Значит...

Похоже на ящик с шарами, не так ли?

114. Когда Гоша Ребрышкин узнал классическую формулу вероятности, он сказал: «Значит, вероятность того, что событие произойдет, всегда равна $\frac{1}{2}$. Ведь всегда есть два исхода: событие произойдет и событие не произойдет. Нам же подходит одно». В чем не прав Гоша?

115. На 11 карточках написаны числа от 1 до 11. Карточки перемешивают и вынимают одну. Найдите вероятности следующих событий:

1) на карточке четное число;
2) на карточке число, кратное 3;
3) на карточке число, кратное 5;
4) на карточке число, кратное либо 2, либо 5;
5) на карточке число, кратное либо 3, либо 5.

Объясните, почему вероятность события в пункте 5 равна сумме вероятностей событий пунктов 2 и 3, а вероятность события в пункте 4 не равна сумме вероятностей событий в пунктах 1 и 2.

116. На столе лежит игральный кубик. Мы можем одновременно видеть три его грани. Какова вероятность, что сумма очков на этих гранях равна: а) 12; б) 13?

117. Как-то вечером я, — продолжал рассказывать дедушка Гаврила, — написал 4 письма, затем взял 4 конверта и написал на них адреса. Но в это время погас свет. Я подумал, а что будет, если наугад положить письма в конверты. Какова вероятность, что: а) ни одно письмо не попадет по своему адресу; б) ровно одно письмо попадет к своему адресату; в) ровно два; г) ровно три; д) все письма придут по адресу?

Давайте снова вспомним о нашем кубике. А как быть, если это не кубик, а параллелепипед? Виноват, я неудачно выразился. Конечно, куб — это также параллелепипед. Итак, как быть, если мы подбрасываем параллелепипед, не являющийся кубом? Возьмем, например, спичечный коробок. Бросим его на стол. Какова вероятность того, что сверху будет самая большая грань (понятно, о какой грани идет речь)? Что он встанет на бок? И, наконец, встанет на попа́? Понятно, что наиболее вероятен первый исход, а наименее — последний. Но как найти величины этих вероятностей?

Проведем эксперимент. Будем бросать наш коробок на стол. Проделаем это много раз: 100, 200 или даже больше. И подсчитаем, сколько раз коробок упал плашмя, на бок и на попа. Полученные числа разделим на число проведенных испытаний. Мы получим приблизительно величины наших вероятностей. Понятно, что сумма этих чисел равна 1. Чем больше мы проведем испытаний, тем точнее полученные числа будут давать значения вероятностей соответствующих событий. Здесь, конечно, важно, чтобы мы бросали коробок и в самом деле случайно, не стараясь поставить его на попа, меняя высоту, скорость вращения и пр.

Описанный здесь способ приближенного вычисления вероятностей называют *статистическим*. Если вероятность события $\frac{1}{2}$, то в среднем оно происходит в половине проведенных испытаний. Если вероятность $\frac{1}{100}$, то событие происходит в среднем в сотой части проведенных испытаний.

Как вы полагаете, вероятность в $\frac{1}{100}$ — большая или маленькая? Все зависит от того, о каком событии идет речь. Если, прыгая через лужу, вы с вероятностью $\frac{1}{100}$ можете в нее попасть, то вы наверняка не откажете себе в удовольствии прыгнуть через лужу. Если бы вероятность авиакатастрофы была равна $\frac{1}{100}$, то никто не летал бы на самолетах.

Ну, пойдем дальше.

118. В каждом из двух ящиков лежат шары: черные и белые. По 10 в каждом. В первом 3 черных, во втором 4 черных. Из каждого ящика вынули 1 шар. Найдите вероятности следующих событий: а) оба шара белые; б) оба шара черные; в) один шар белый, а другой черный.

119. Монету подкинули два раза. Какова вероятность, что оба раза выпал орел? А какова вероятность, что при 100 бросаниях монеты все 100 раз выпал орел?

Надо сказать, что первый вопрос последней задачи не так прост, как это может показаться. В Средние века развернулась горячая дискуссия по этому поводу. Одни считали, что правильный ответ — это $\frac{1}{4}$, а другие полагали, что ответ $\frac{1}{3}$. Мы-то знаем, что верный ответ — это...

А теперь обсудим вторую часть задачи. Здесь искомая вероятность равна $(\frac{1}{2})^{100}$. А это означает, что такое событие в среднем происходит в 2^{100} испытаниях.

120. Допустим, на то, чтобы один раз подбросить монету, требуется 1 секунда. Как вы думаете, сколько времени потребуется, чтобы подбросить ее 2^{100} раз?

Попробуйте, пусть даже очень грубо, оценить число 2^{100}. (В конце книги приводятся соответствующие оценки.)

Так вот, 2^{100} секунд — это огромная величина, это десятки миллиардов миллиардов лет.

И здесь я хочу рассказать одну историю, которая показывает, насколько осторожным надо быть, применяя математические теории к обычной жизни.

Однажды в одном тихом российском городе выступил с популярной лекцией по теории вероятностей приехавший из Москвы профессор математики. Он разобрал задачу, которая у нас имеет номер 119. В конце он сказал, что найденная вероятность практически равна нулю. Подобные события следует считать невозможными, поскольку они не могут произойти в течение сколько-нибудь разумного промежутка времени. Присутствовавший в зале полковник поинтересовался:

— Какова вероятность того, что первый встречный на улице человек окажется мужчиной?

— Думаю, что это достаточно близко к $\frac{1}{2}$.

— Следовательно, вероятность встретить подряд 100 мужчин равна $(\frac{1}{2})^{100}$?

— Думаю, что так.

— То есть это событие является невозможным. Подойдите, пожалуйста, к окну.

В конце пустынной улицы появилась колонна солдат, которые возвращались в свои казармы с учений.

Профессор немного смутился и стал объяснять, что он имел в виду *независимые события*, в данном же случае теория явно неприменима, поскольку... и так далее, и так далее. Но впечатление все же было испорчено.

Но все-таки теория вероятностей — очень полезная для практики наука. Это показывают две следующие задачи.

121. Для того чтобы подсчитать количество рыбы в водоеме, работники одного рыбоводческого совхоза поступили следующим образом. Они сетью выловили некоторое количество рыбы и пометили 100 рыбин. После чего всю рыбу выпустили обратно. Через неделю они снова забросили сеть и выловили 123 рыбины, среди которых помеченных оказалось 18. Оцените количество рыбы в этом водоеме.

122. Очень важную роль в современной жизни играют различные социологические опросы. Но не всегда люди готовы честно ответить на поставленный вопрос. Некоторые вопросы, честно говоря, и задавать-то нечестно. Как, например, ответить на вопрос: «Приходилось ли тебе врать?»? Вот одна история. Директор одной крупной школы решил выяснить, какой примерно процент учащихся старших классов курит. Прямо спросить: «Ты куришь?» — нехорошо. Узнавать через знакомых — еще хуже. Вот что придумал директор. Каждый старшеклассник должен был сделать следующее. Подкинуть монету. Но так, чтобы этого никто не видел. Если выпадает орел, он должен ответить на вопрос: «Верно ли, что дважды два — четыре?» Если же выпадет решка, то он должен ответить на вопрос: «Ты куришь?» Сообщить надо лишь ответ «да» или «нет». (Почти стихи получились.) Но все это надо проделать совершенно честно.

Вот какие результаты получил директор. Опрошено было ровно 200 человек. Ответ «да» дали 130 человек. Какой примерно процент учеников старших классов этой школы курит? (Конечно, чтобы получить более достоверный результат, этот эксперимент надо повторить несколько раз.)

Вот еще несколько задач по теории вероятностей.

123. В соревновании в беге на 100 м участвуют бегуны Алексеев, Борисов, Воробьев и Гринберг. Вероятность того, что Алексеев не победит, равна 0,6. Вероятность, что не победит Борисов, составляет 0,7. Вероятность не победить для Воробьева равна 0,8. Чему равна вероятность не победить для Гринберга?

124. На первенстве мира по футболу сборная России оказалась в одной группе с командами Бельгии, Японии и Туниса. Продолжать бороться за первенство будут 2 лучшие команды группы. Вероятность продолжать борьбу для сборной Бельгии равна 0,7, для сборной Японии — 0,6, для Туниса — 0,3. Какова вероятность, что сборная России выйдет в следующий круг соревнований?

125. Имеется 30 человек. Какова вероятность, что все 30 дней рождения всех 30 человек различны? (Для получения приблизительного ответа можно воспользоваться помощью калькулятора или же компьютера. После решения этой задачи вернитесь к истории, случившейся в начале лекции.)

126. Около дома Васи имеется троллейбусная остановка, на которой останавливаются троллейбусы под номерами 12 и 20. Троллейбус № 12 идет на стадион, а троллейбус № 20 — в библиотеку. Известно, что троллейбусы идут с одинаковыми интервалами. Каждый день, освободившись от уроков, Вася отправляется либо на стадион, либо в библиотеку. Происходит это в самое разное время. Выходя из дома, Вася садится в первый попавшийся троллейбус. И почти всегда оказывается на стадионе, а не в библиотеке.

Как это можно объяснить?

127. В самом начале лекции мы говорили, что обычная монета является обычным «инструментом», с помощью которого бросают жребий между двумя... В общем, между *двумя*. Но при этом предполагается, что монета правильная и вероятности выпадения орла и решки равны между собой. А как бросить жребий с помощью *неправильной* монеты, то есть такой монеты, для которой эти вероятности не равны?

128. Как-то Федя обратился к своему отцу с просьбой. (Неважно какой.) В ответ отец предложил Феде сыграть три партии в шахматы. По очереди, с ним и с матерью. И если Федя сумеет выиграть подряд две партии, то он его просьбу выполнит. «А с кем я должен играть первую партию?» — поинтересовался Федя. «А это уж выбирай сам», — ответил отец. С кем следует Феде играть первую партию, чтобы его шансы (то есть вероятность) выиграть две партии подряд были бы наибольшими? Известно, что отец играет в шахматы лучше, чем мать.

129. Победителю одной телевизионной игры, чтобы получить приз, следует принять участие в лотерее. Имеется 30 билетов, 5 из которых с выигрышем. Если сложить все эти билеты в один ящик и затем вынуть один наугад, то вероятность выигрыша очевидно равна $\frac{1}{6}$. Ведущий предлагает следующий способ розыгрыша. Он раскладывает билеты в 5 ящиков. Затем игрок должен выбрать ящик и достать из выбранного ящика билет. Следует ли игроку соглашаться на такой метод розыгрыша приза, если у него есть основания сомневаться в добром отношении телеведущего? Может ли телеведущий уменьшить вероятность выигрыша или увеличить ее? В каких пределах может изменяться эта вероятность?

130. Известный ведущий известной телевизионной передачи предлагает участнику игры следующий способ розыгрыша приза. Выносятся три шкатулки. Известно, что две из них пустые, а в одной находится приз. Участник указывает на одну из шкатулок. Затем ведущий, который, безусловно, знает, где находится вожделенный приз, открывает одну из двух оставшихся шкатулок и показывает, что она пуста. Теперь играющий имеет право либо сохранить свой первоначальный выбор, либо сменить его, указав другую неоткрытую шкатулку. Что выгоднее: сохранить первоначальный выбор или сменить его? А может, обе возможности равноправны?

131. Ближайшей родственницей теории вероятностей является статистика. Трудно в двух словах объяснить, что это за наука. И не будем пытаться. Мы употребляли слово «статистический» в сочетании «статистический метод определения вероятности». И вообще, нахождение всевозможных средних значений — любимое занятие статистиков. Но сильно доверять средним значениям — не стоит. Расскажем в этой связи одну историю. Два друга, назовем их Алик и Борис, устроились на новую работу в частные компании. В каждой компании работало по 100 человек. Вечером они встретились. Алик похвастался, что средняя зарплата на его работе равна 660 у. е. в месяц («у. е.» означает «условную единицу»; в качестве условной единицы можно взять школьную тетрадь, карандаш, стакан компота и даже 1 драхму). Но в ответ Боря с важным видом сказал, что на его работе средняя зарплата и вовсе 760 у. е. Но когда они встретились через полгода, выяснилось, что Алик каждый месяц получал по 150 у. е., а Боря и вовсе по 100 у. е. Что же оказалось? В каждой компании был 1 президент, 4 вице-президента, 5 топ-менеджеров и 90 служащих. Каждый служащий в первой компании получал по 150 у. е., а во второй соответственно по 100 у. е. Топ-менеджеры получали соответственно по 3500 у. е. и 5000 у. е. Чему равнялись зарплаты вице-президентов и президентов в каждой компании, если известно, что президент компании получает в 3 раза больше своего вице-президента?

Устраиваясь на работу, следует интересоваться не средней зарплатой, вернее, не только средней зарплатой. Важной характеристикой является *мода* — наиболее часто встречающееся значение зарплаты. Чему равна мода для каждой фирмы?

132. Теория вероятностей помогает при изучении различных игр, в которых результат зависит от случайных явлений. Рассмотрим, например, следующую игру. Один игрок подбрасывает монету, а другой должен угадать, что выпадет: орел или решка. Если он сумеет угадать три раза подряд, то получает 6 рублей. В противном случае он платит 1 рубль. (Это означает, что игра может закончиться уже после того, как монета будет подброшена один раз.) Кому эта игра выгодна?

133. На следующий день после лекции дедушки Рамиль удивил всех ребят. Он принес три коробки. На одной стояла буква *А* и число 3. На другой стояла буква *Б*, а внутри были три карточки с числами 2, 2 и 5. На третьей стояла буква *В*, а внутри оказались три карточки с числами: 1, 4 и 4. Рамиль предложил сыграть с ним в следующую игру. Соперник выбирает любую коробку. Затем он сам выбирает одну из оставшихся. Игра состоит в следующем: если кем-то выбрана коробка *А*, то игрок получает 3 очка; из других коробок следует наугад достать карточку, имеющееся на ней число и указывает количество полученных игроком очков. У кого больше очков, тот и выиграл. Как следует изучать эту игру? Рассмотрим пару *А* и *Б*. Возможны три равновероятных исхода: (3; 2), (3; 2) и (3; 5) (первым в каждой паре указано число *А*, вторым — *Б*). Как видите, в двух случаях из трех побеждает *А*. А кто чаще выигрывает в парах *Б* и *В*, *В* и *А*? Какую коробочку следует выбрать при игре втроем?

Дедушке очень понравилась эта игра. Он заметил, что в жизни подобные ситуации, когда A лучше $Б$, $Б$ — лучше $В$, а $В$ — лучше A, встречаются не так уж и редко. При этом он напомнил ребятам известную игру «камень — ножницы — бумага». (А Федя вспомнил, как дедушка разделил 9 бегунов на 3 команды. Об этом было рассказано в предыдущей книге про Федю и дедушку.)

134. А еще на следующий день всех удивил уже Коля. Он также принес три коробки. На одной также стояла буква *А* и число 3. На другой стояла буква *Б*, а внутри было 24 карточки. На 14 стояло число 2, на 5 число 4 и на 5 — число 6. В коробке с буквой *В* было также 24 карточки. На 13 стояло число 1, а на 11 — число 6. Смысл игры тот же самый, что и в игре, описанной в предыдущей задаче. Если проанализировать эту игру, то результат будет совсем удивительным. *А* в большинстве случаев выигрывает и у *Б*, и у *В*. *Б* выигрывает у *В*. Но при игре втроем чаще всего выигрывает коробка *В*, а реже всего — коробка *А*. Получается, при игре по два *А* обыгрывает и *Б*, и *В*; *Б* обыгрывает *В*, а втроем чаще всех выигрывает *В*, и реже всех *А*.

Удивительно! Проверьте это.

По поводу этой игры дедушка ничего не сказал, а лишь развел руками.

И здесь автор хочет добавить немного *от себя* (то есть *отсебятины*).

Сейчас нередко сталкиваешься со всевозможными астрологами и ясновидящими. Оказывается, все уже давно предсказано Нострадамусом. Если взять это, говорят эти *ясновидцы*, — умножить на то и прибавить 1253, то получится в точности год Великой засухи. И главное, находятся люди, которые во всю эту чепуху верят.

Вот одна правдивая история, а также задача. Эту задачу предложил один мой знакомый (то есть знакомый автора) для одной заочной математической олимпиады. Надо сказать, что задача эта не является оригинальной. Она представляет некую переработку одной известной и старинной задачи.

135. В розыгрыше главного приза телевизионной лотереи участвовало 300 человек. Они выстроились по кругу. Их перенумеровали, начиная с кого-то, получившего номер 1, а затем начали пересчитывать: один, два, три. И снова: один, два, три. При этом каждый третий всякий раз выбывал. (Так, на первом круге выбыли все участники с номерами, кратными 3.) Счет продолжался до тех пор, пока не остался один человек. (Понятно, что сделан был не один круг.) Этот человек и получил главный приз. (Им «случайно» оказалась тёща телережиссера.) Какой номер в первоначальной расстановке имел этот человек?

Как объяснял автор задачи, упоминание о тёще он сделал просто так, поскольку не верит во всякие случайные большие выигрыши на телевидении. И не только на телевидении.

Задачу решили многие и по-разному. Одни получали нужный ответ с помощью рассуждений. Другие *честно* считали.

Одна девочка написала: «Мой папа — командир полка. Он выстроил по кругу 300 солдат и приказал им пересчитаться в соответствии с условием. Остался солдат под номером... Он помог мне решить остальные задачи олимпиады, так как окончил 2 курса математического факультета».

Но самым удивительным оказалось письмо от одного мальчика.

Он сообщил верный ответ, а потом написал: «А причем здесь тёща? Я взял слова „случайно тёща“ и „тёща телережиссёра“, в каждой паре подсчитал сумму номеров входящих в них букв, а затем нашел среднее арифметическое. Получился правильный ответ».

Можете проверить, все абсолютно верно. Как и положено, буквы «е» и «ё», а также «и» и «й» считаются различными.

Вот вам и Нострадамус!

Глава 10

НЕИЗВЕСТНЫЕ В ДОМЕ

Поговорим об *Алгебре*.

Страну Алгебру населяют Буквы. Буква может быть просто буквой. Но она может и принадлежать к тому или иному *классу*. Она может быть Параметром, Переменной или Неизвестной. Никакой классовой борьбы в мире букв не наблюдается. Одна и та же буква может спокойно *переходить из класса в класс* и даже одновременно принадлежать различным классам.

Буквы любят объединяться в различные группы, компании. При этом используются числа и арифметические действия. Такие группы букв называют *алгебраическими выражениями*. Главное отличие этих выражений от тех, с которыми вам нередко приходится встречаться, состоит в том, что это *культурные выражения*. Человек должен научиться правильно, то есть культурно, алгебраически выражаться.

Если вместо букв в алгебраическое выражение подставить какие-то числа и произвести указанные арифметические действия, то мы получим *числовое значение алгебраического выражения*. Подставлять вместо букв мы имеем право не любое число, а лишь *допустимое*. Это самый главный закон, который в стране Алгебре соблюдается *неукоснительно*. В нем несколько пунктов, а первым идет правило — нельзя делить на 0. С другими пунктами вы ознакомитесь несколько позднее.

Два алгебраических выражения, соединенные знаком равенства («=»), образуют *алгебраическое равенство*. И несмотря на то, что в стране Алгебре царит полное *равенство и братство*, алгебраическое равенство не всегда превращается в верное числовое равенство после замены букв числами.

Среди *алгебраических равенств* мы выделяем следующие *разновидности*: Тождество, Формула, Уравнение. Разницу между этими разновидностями не так просто объяснить. Скажу лишь, что тождество — это алгебраическое равенство, верное при всех допустимых значениях входящих в него букв.

На уроке алгебры, как и на любом уроке математики, мы занимаемся главным образом тем, что решаем задачи. Вот типичные формулировки: *упростить алгебраическое выражение* (формулировка, конечно, неудачная, но смысл ее достаточно понятен, понятно также, что если алгебраическое выражение всегда равно 0, то 0 и является ответом на поставленный вопрос), *доказать тождество, вывести формулу, решить уравнение*.

Возможно, что задача *решить уравнение* чаще всего встречается на уроках математики. И не только на уроках математики.

Авторы детективных романов нередко изображают, как следователь рисует какие-то таинственные схемы, и многозначительно поясняют: перед ним возникло уравнение со многими неизвестными.

Конечно, в строго математическом смысле (а другие смыслы в математике не имеют смысла), задачи, которые решает следователь, уравнениями не являются.

А что такое уравнение? Что значит решить уравнение? Эти вопросы, конечно, очень важны. Но отвечать на них я не буду. Пока. Полное и правильное объяснение, полные и правильные ответы на эти вопросы увели бы нас очень далеко в сторону, да и знаний у вас пока маловато, чтобы все понять. Давать же не совсем правильные ответы было бы совсем не правильно.

Здесь важно, что с помощью уравнений мы можем решать разнообразные задачи, возникающие у нас. Сначала на уроках математики. А затем и в практической жизни.

...Как решать эту задачу, с иксом или без икса? Такой вопрос нередко возникает при решении самых разных задач. В начальных классах мы учимся решать задачи чисто арифметическими методами, без икса. Затем знакомимся с алгебраическими методами и привыкаем решать задачи только с помощью уравнений, с помощью икса или других неизвестных. Настолько привыкаем, что даже забываем о существовании чисто арифметических методов. А ответ на вопрос простой: задачу надо решать так, как вы умеете, как вам кажется удобней. Но без икса — лучше, хотя и не всегда возможно. А вот, наоборот, решать с иксом возможно всегда. Или почти всегда. Но об этом поговорим позднее.

Алгебраические методы возникли сравнительно недавно. В Средние века или даже в эпоху Возрождения. Ученые древности не знали алгебры. Например, Архимед. И остается только удивляться и восхищаться их математическими открытиями, которые они делали безо всякой алгебры. Даже той, которую знает, вернее обязан знать, любой ученик шестого класса.

С помощью алгебры мы можем коротко в буквенном виде формулировать законы арифметики, доказывать полезные формулы, решать различные задачи. И еще многие вещи.

Давайте все же перейдем от слов к делу, а дело в математике — это решение задач, и для разгона решим несколько алгебраических задач. Не очень сложных и даже совсем простых.

136. Какие из следующих равенств верны при всех *допустимых* значениях букв (являются тождествами), а какие — нет?

a) $(a + b) : c = a : c + b : c$;
b) $a : (b + c) = a : b + a : c$;
c) $(a + b)(c + d) = ac + bc + ad + bd$;
d) $(a - b)(c - d) = ac - bc + ad - bd$;
e) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;
f) $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$;
g) $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.

Среди различных алгебраических равенств очень важную роль играют *формулы*. В любой науке используется алгебраический метод, применяются соответствующие формулы. Да что там наука. В своей работе используют формулы люди самых разных профессий — портные и повара, водители и строители, садоводы и механики. Любой человек при начислении налогов, расчете коммунальных платежей, ремонте квартиры вынужден иметь дело с формулами.

Алгебраические формулы — известные (такими, например, являются равенства e, f и g в задаче 136) или же специально полученные для решения данной задачи — могут значительно облегчить нам арифметические вычисления.

137. Указанные здесь вычисления удобно произвести, используя соответствующие алгебраические формулы:

1) $19 \cdot 21 =$
2) $99^2 - 98^2 =$
3) $23 \cdot 27 =$
4) $123^2 - 122^2 =$
5) $99 \cdot 101 =$
6) $1002 \cdot 998 =$
7) $103^2 - 3^2 =$

8) $1011^2 - 121 =$

9) $999^2 - 1 =$

10) $117 \cdot 119 - 118^2 =$

11) $1985 \cdot 1987 - 1984 \cdot 1988 =$

12) $998 \cdot 1002 - 999^2 =$

13) $\dfrac{2193^2 - 1998^2}{4191} - \dfrac{1998^2 - 1903^2}{3901} =$

14) $1995{,}37 \cdot 1996{,}37 - 1994{,}37 \cdot 1997{,}37 =$

15) $2896 \cdot 2897{,}2897 - 2897 \cdot 2896{,}2896 =$

16) $1357 \cdot 2634{,}2634 - 2634 \cdot 1357{,}1357 =$

17) $123\,456\,789 \cdot 456\,321\,987 - 2 \cdot 123\,456\,788 \cdot 456\,321\,988 +$
$+ 123\,456\,787 \cdot 456\,321\,989 =$

138. Рассмотрим последовательность $a_1, a_2, a_3, \ldots$, в которой первый член, то есть a_1, равен 1917, а второй равен 1991. Начиная с третьего каждый следующий член последовательности выражается через два предыдущих по формуле $a_{n+1} = (a_n + 1) : a_{n-1}$. Чему равен a_{2006}?

Алгебраические формулы дают нам возможность коротко и ясно записывать различные зависимости, с которыми нам приходится сталкиваться. Например, если автомобиль или другое тело движется с постоянной скоростью, то чтобы найти путь, пройденный автомобилем за известное время, надо перемножить скорость на время. То есть имеем формулу:

$$S = vt. \qquad (*)$$

(В математических работах обычно используются такие обозначения-указатели. С их помощью автор указывает место, к которому следует обратиться читателю, а читатель быстро и без труда его находит.)

Здесь S — длина пройденного пути, v — скорость данного тела (автомобиля), t — время. Кстати, именно эти буквы — S, v и t — часто используются для обозначения пути, скорости и времени.

Внимание! Все величины должны быть измерены в соответствующих единицах. Так, если путь мы измеряем в километрах (км), а время в часах (ч), то скорость должна измеряться в километрах в час (км/ч).

Формула (*) связывает три величины: S — путь, v — скорость и t — время. Зная любые две из них, мы можем найти третью.

139. Расстояние между городами A и B равно S км. Из A в B со скоростью v км/ч выехал автомобиль. Из B в A через 1 ч после выезда первого со скоростью u км/ч выехал другой автомобиль. Они встретились через t ч после выезда первого. Напишите формулу, связывающую S, v, u и t. Найдите t, если $S = 600$ км, $v = 60$ км/ч, $u = 75$ км/ч.

140. Расстояние между городами равно S км. Машина проехала это расстояние за t часов, причем первую половину пути она ехала со скоростью v км/ч, а вторую со скоростью u км/ч. Выразите t через v, u и S.

А теперь пора уже заняться уравнениями.

Алгебраическое равенство становится ***уравнением,*** *если в нем некоторые буквы объявляются* ***неизвестными.*** (Эту фразу ни в коем случае нельзя считать определением уравнения.)

Если такая буква-неизвестное только одна, то это *уравнение с одним неизвестным.*

Обычно для обозначения неизвестных используются буквы $x, y, z, \dots$. Но возможны уравнения, в которых неизвестные обозначены через $a, b, c, \dots$.

Вообще неизвестной может быть объявлена *любая буква.* Рассмотрим уравнение с одним неизвестным. *Число, обращающее уравнение в верное числовое равенство, называется* ***решением,*** *или* ***корнем,*** *уравнения.*

Например, уравнение

$$(x + 3) : (3x - 2) = 3x + 1 \qquad (**)$$

обращается в 0 при $x = 1$. Таким образом, 1 является *корнем* или решением этого уравнения.

Задача *решить уравнение* — одна из самых распространенных задач, возникающих в связи с понятием уравнения.

Решить уравнение — это значит превратить *неизвестное в известное*. Так что уравнение в некотором смысле есть символ науки, поскольку цель науки и есть превращение неизвестного в известное.

Решить уравнение — это значит найти все его корни, указать все его решения.

А что значит «найти» корни? *Корень уравнения* — это вам не гриб. Решить уравнение — это значит, что все его корни должны быть *указаны в виде* «$x = \ldots$», где справа должно стоять число. Совет *«зри в корень»* относится ко всем, кто решает уравнение. И не только к ним.

В приведенном выше уравнении, которое мы обозначили (**), неважно каким образом, найден корень $x = 1$.

Но это вовсе не означает, что мы решили уравнение. А вдруг у него имеются еще корни? Оказывается, действительно, уравнение (**) имеет еще один корень: $x = -\frac{5}{9}$ (проверьте). Более того, других корней это уравнение не имеет.

Таким образом, задача решить уравнение $\frac{(x+3)}{(3x-2)} = 3x + 1$ имеет следующий ответ: $x_1 = 1$, $x_2 = -\frac{5}{9}$. (Читается: x_1 — «икс первое», x_2 — «икс второе».)

Если уравнение имеет один корень, то мы просто пишем: «Ответ: $x = \ldots$».

Рассмотрим уравнение $x^2 = -3$. Как вы знаете, квадрат любого числа является неотрицательным числом. Значит, никакой квадрат не может равняться -3. Итак, мы решили уравнение $x^2 = -3$. Все его корни найдены — их вовсе нет! (Правда, у *комплексных чисел* могут быть квадраты, меньшие нуля. Но в школе их сейчас не изучают.)

141. Решите уравнения (некоторые из них не имеют решений).

1) $\frac{x}{1} = 2$;

2) $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}=0;$

3) $x^2+x^4=0;$

4) $x^2+(x+1)^2=0;$

5) $2x+3=2(x+2);$

6) $2x+3=3x+4;$

7) $3x+3=3(x+1);$

8) $(x-1)(x+2)=0;$

9) $(x+1)(2x+1)=0;$

10) $(5-2x)(2-5x)=0;$

11) $(x+1)(3x+2)=(x+1)(x+3);$

12) $(x-1)^2=x^2-1;$

13) $(x^2+1)(x+1)=0;$

14) $(x-1)(x-2)(x-3)=0;$

15) $(x^2-1)(x-1)=0;$

16) $x(x+1)+(x+1)^2+(x+1)(x+3)=0;$

17) $x(2x+3)(x-2)=x(x-2)(4x+5);$

18) $y^2-3y+2=0;$

19) $x^3-x^2=1-x;$

20) $x^5-x+2x^4-2=0;$

21) $1-\dfrac{2}{x}=2-x;$

22) $1+\dfrac{6}{y^2}=\dfrac{5}{y};$

23) $99+x^2=100x.$

Рассмотрим следующую задачу.

142. Два брата вместе нашли 55 белых грибов. Причем старший брат нашел на 7 грибов больше, чем младший. Сколько грибов нашел каждый из братьев?

Приведем два решения этой задачи: арифметическое и алгебраическое.

Арифметически эту задачу можно решить, например, следующим образом. Если бы старший брат нашел столько же грибов, сколько и младший, то есть на 7 грибов меньше, то вместе они нашли бы ... грибов. Значит, младший брат нашел ..., а старший соответственно ... .

А вот алгебраическое решение этого уравнения. Воспользуемся методом уравнений.

Обозначим через x количество грибов, найденных младшим братом. Тогда старший брат нашел $x + 7$ грибов.

Вместе они нашли $x + (x + 7) = 2x + 7$.

По условию они нашли 55 грибов. Получаем уравнение:

$$2x + 7 = 55.$$

Решим полученное уравнение: $2x = 55 - 7$; $2x = 48$; $x = 24$.

Таким образом, младший брат нашел 24 гриба, а старший — 31 гриб.

Нетрудно заметить сходство в этих решениях. Решая задачу арифметически, мы проделали те же операции, что и при решении полученного уравнения.

Обратите внимание на 3 этапа решения задачи алгебраическим способом с помощью уравнений.

1. Выбор неизвестного (неизвестных).
2. Составление уравнения (системы уравнений).
3. Решение полученного уравнения (системы уравнений).

На втором этапе при составлении уравнения мы как бы записываем с помощью известных и неизвестных величин ситуацию, описанную в задаче обычным языком. Можно сказать, что на этом этапе мы переводим условие задачи на алгебраический язык.

Но прежде чем вы приступите к решению данных здесь задач, выскажу свое мнение. Если задача допускает простое и понятное арифметическое решение, то ее следует решать именно арифметически. Алгебраические методы следует применять тогда, когда не работают арифметические. Или когда это входит в задание. К сожалению, многие ребята, освоив алгебраические методы, совсем не используют арифметические. Так проще, думать не надо, считают они. Это неправильное мнение. Думать надо всегда. И, кроме того, есть задачи, которые арифметически решаются намного проще, чем алгебраически.

Каждую из следующих задач решите двумя способами: арифметическим и алгебраическим.

143. На двух полках стоят книги. Всего книг 123, при этом на нижней полке на 11 книг больше, чем на верхней. Сколько книг на каждой полке?

144. На двух полках стоят книги. Всего книг 123, при этом на нижней полке в 2 раза больше книг, чем на верхней. Сколько книг на каждой полке?

145. На трех полках стоят книги, при этом на нижней полке в 2 раза больше книг, чем на средней, и на 11 больше, чем на верхней. Сколько книг на каждой полке, если всего книг 134?

146. В книжном шкафу 5 полок, на которых находится 200 книг, причем меньше всего книг на нижней полке, а на каждой следующей полке в направлении снизу вверх на 1 книгу больше, чем на предыдущей. Сколько книг на каждой полке?

147. В книжном шкафу 5 полок, на которых находится 200 книг, причем на каждой полке в направлении снизу вверх количество книг возрастает на одно и то же число по сравнению с предыдущей. Сколько книг на средней полке?

148. Колина мама испекла блины. Коля и папа вместе съели 16 блинов, Коля и мама вместе съели 13 блинов, ну а мама и папа вместе съели 11 блинов. Сколько блинов съел Коля?

149. За 5 дней туристы преодолели 306 км, причем во второй день они прошли в 2 раза больше, чем в первый; в третий день они прошли на 7 км меньше, чем во второй; за четвертый день они прошли столько же, сколько за первый и второй день вместе, а за пятый — на 70 км меньше, чем за первые 3 дня. Сколько километров прошли туристы за третий день?

(Эта задача показывает преимущества алгебраического метода. Арифметически ее решить нелегко. Но алгебраи-

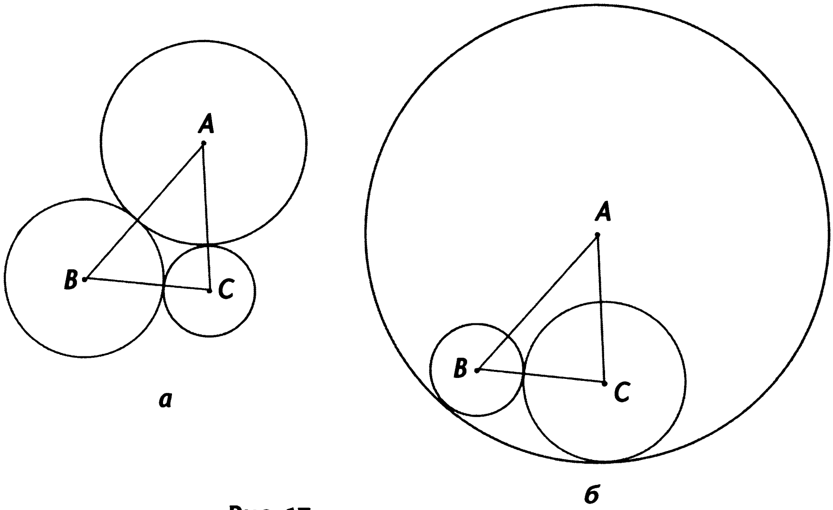


Рис. 17

чески, или, как говорят, «с иксом», она решается несложно. Найдите только алгебраическое решение.)

Решите несколько геометрических задач, которые удобно решать, составляя уравнения.

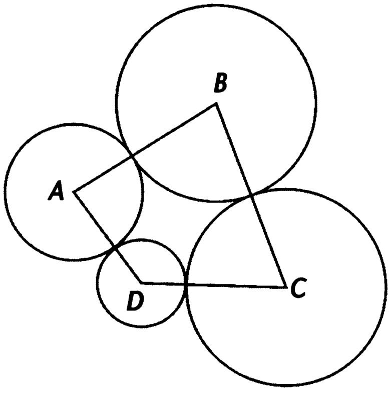
150. Дан треугольник ABC со сторонами $AB = 16$ см, $BC = 11$ см, $CA = 13$ см. Три окружности имеют центры в его вершинах и касаются друг друга так, как показано на рис. 17, *а, б*. Найдите радиусы этих окружностей.

151. На прямой расположены точки A, B, C и D, следующие друг за другом в указанном порядке, причем $AB = 1$, $BC = 2$, $CD = 3$. На отрезке BC находится точка M, делящая BC и AD в одном и том же отношении ($AM : MD = BM : MC$). Найдите это отношение.

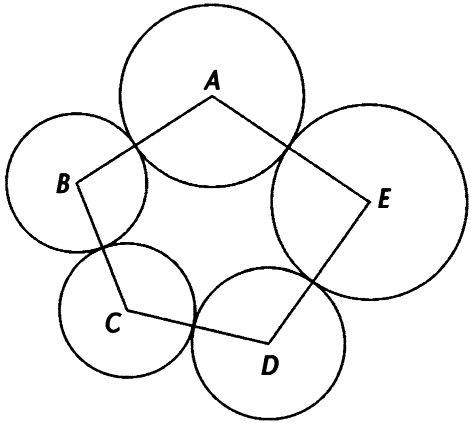
152. Несколько окружностей касаются друг друга так, как показано на рис. 18, *а, б* (центры окружностей в вершинах изображенных многоугольников). В каждом случае найдите радиусы этих окружностей.

Для рис. 18, *а*, рассмотрите два случая: 1) $AB = 3$, $BC = 5$, $CD = 4$, $DA = 3$; 2) $AB = 5$, $BC = 6$, $CD = 4$, $DA = 3$.

Для рис. 18, *б*, рассмотрите три случая: 1) $AB = 5$, $BC = 6$, $CD = 4$, $DE = 5$, $EA = 3$; 2) $AB = 5$, $BC = 7$, $CD = 4$, $DE = 5$, $EA = 3$; 3) $AB = 6$, $BC = 7$, $CD = 4$, $DE = 5$, $EA = 8$.



а



б

Рис. 18

Алгебраический метод решения текстовых задач — это не только введение неизвестных и решение получившегося уравнения (или системы). Решим, например, следующую задачу.

153. Машина ехала из Москвы в Санкт-Петербург со скоростью 80 км/ч, а возвращалась со скоростью 120 км/ч. Чему равна средняя скорость машины на всем пути туда и обратно?

Когда эту задачу предложили решить Боре Торопыжкину, он сказал: «Подумаешь, задача! Делать нечего. Сложить и пополам разделить. Получается $(80+120):2=100$ км/ч».

Вы согласны с таким решением?..

Конечно, мы можем, зная расстояние между Москвой и Санкт-Петербургом (примерно 600 км), вычислить время, затраченное на путь туда и обратно, а затем весь путь разделить на суммарное время. Получим среднюю скорость. Но ведь расстояние мы знаем приблизительно. Значит, и ответ будет приблизительным? И вообще, зависит ли средняя скорость от расстояния? Давайте рассмотрим общий случай. Пусть расстояние равно S. S играет роль параметра.

Выразим всё через S. И если S в результате исчезнет (сократится), то это будет значить, что ответ от расстояния не зависит.

Вот еще две подобные задачи и потом — некоторые другие.

154. Дорога состоит из двух равных по длине частей – подъема и спуска. Пешеход идет на подъеме со скоростью 3 км/ч, а на спуске – со скоростью 6 км/ч. Чему равна средняя скорость на всем пути?

155. Путь из A в B равен 6 км и состоит из подъемов, спусков и горизонтальных участков. Пешеход прошел этот путь туда и обратно. На всем пути его скорость на подъемах равнялась 3 км/ч, на спусках – 6 км/ч, а на горизонтальных участках – 4 км/ч. Сколько времени затратил пешеход на свой путь?

156. Однажды два брата-школьника Гоша и Дима по дороге из школы домой зашли в магазин. В углу стояли испорченные весы. Весы имели стрелку, которая должна указывать вес. Однако стрелка указывала не на 0, хотя на весах не было никакого груза. Когда Гоша положил на весы свой портфель, стрелка остановилась на отметке 2,5 кг. Когда на весы положил свой портфель Дима, стрелка указала 3 кг. Когда же на весы были положены оба портфеля, стрелка указала на 6 кг. Сколько весил каждый портфель?

157. Летит стая Змеев Горынычей. Она состоит из Змеев двух видов. Змеи одного вида имеют по 3 головы и по 7 хвостов. У Змеев другого вида голов 5, зато всего лишь 4 хвоста. Если подсчитать все головы стаи, то получим 98 голов. Хвостов в стае всего 129. Сколько Змеев того и другого вида в стае?

Решите эту задачу тремя способами.

1) Составьте уравнение, взяв в качестве неизвестного количество Змеев первого вида. 2) Составьте уравнение, взяв в качестве неизвестного количество змеев второго вида. 3) Составьте систему из двух уравнений с двумя неизвестными, взяв в качестве неизвестных количество Змеев каждого вида. *Может, вы сможете* решить эту задачу арифметически?

158. Для подарков детям старшей группы детского сада купили два вида наборов конфет: шоколадные и фруктовые. Каждому ребенку подарили по одному набору каждого вида. Килограмм шоколадных конфет стоил 15 кублей, а килограмм фруктовых стоил 8 кублей. (Кубль — денежная единица. В одном кубле 100 ропеек.) Общий вес шоколадных наборов был на 8,5 кг меньше, чем общий вес фруктовых, а стоили они (шоколадные конфеты) на 20 кублей 40 ропеек меньше. Сколько детей в старшей группе детского сада и сколько весил каждый набор (известно, что если измерять вес набора в граммах, то этот вес должен делиться на 100)?

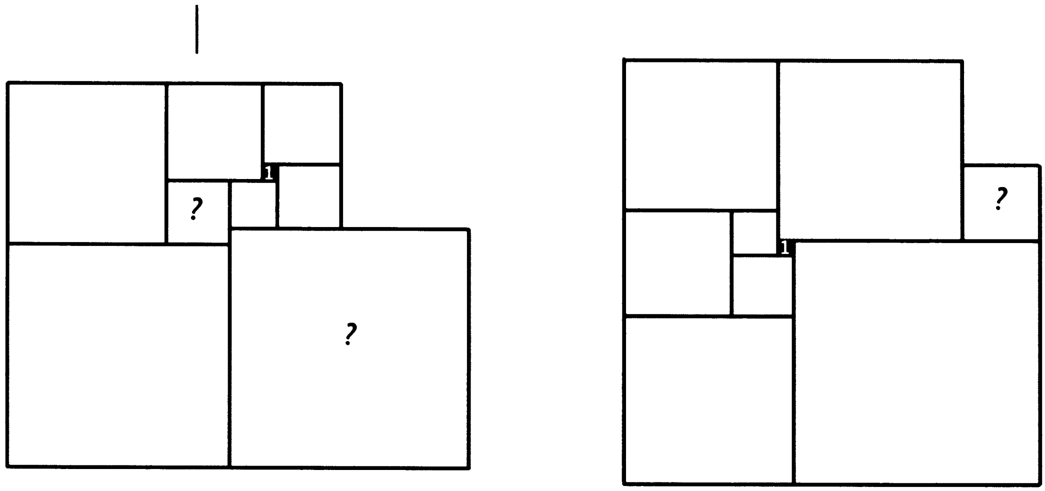
159. В магазине продавались наборы фломастеров. Один набор состоял из 3 черных и 4 синих фломастеров. Другой — из 2 черных и 5 синих. Всего же черных фломастеров было 77 штук, а синих 147. Сколько всего наборов было в магазине?

(Кстати, эту задачу можно решить мгновенно, в одно действие, если *подумать и кое-что заметить*.)

160. Горели 5 свечей. Две из них потушили. Сколько свечей осталось? Это — шутка. А вот более серьезная и более скучная задача. В 8 часов вечера были зажжены две свечи одинаковой длины, но разного диаметра. Одна сгорает за 5 часов, а другая — за 4 часа. Через некоторое время свечи были потушены. При этом оказалось, что от первой свечи остался огарок в 4 раза длиннее, чем от второй. Когда были потушены свечи?

161. Господин Гольдбергов — управляющий сразу двумя банками, Мешкомбанком и Пинкомбанком, — проживает в своем загородном коттедже. По рабочим дням каждое утро в одно и то же время за ним приезжает машина, и он прибывает на службу точно к началу рабочего дня. Машина также выезжает из гаража в одно и то же время. Но однажды шофер позвонил рано утром и предупредил, что из-за неисправности машины он может несколько задержаться. В это утро господин Гольдбергов вышел за 1 час до момента обычного прихода машины и пошел пешком ей навстречу. Однако шофер быстро *исправил неисправность* и выехал вовремя. Он встретил управляющего и отвез его в банк. Прибыли они в банк на 20 минут раньше обычного. Сколько времени продолжалась утренняя прогулка господина Гольдбергова? (Скорость машины считается постоянной, а время на разворот равно нулю.)

162. Однажды барон К. Ф. И. фон Мюнхгаузен рассказал, как он пешком преодолел расстояние между Айнбургом и Цвай-



а *б*

Рис. 19

штадтом. При этом ровно половину пути барон прошел со скоростью 5 км/ч, а $\frac{7}{15}$ всего затраченного на переход времени он шел со скоростью 6 км/ч. Может ли рассказ барона быть правдивым?

И в заключение я хочу предложить несколько задач (на самом деле несколько, поскольку задача состоит из нескольких пунктов) по геометрии, при решении которых используются алгебраические методы.

163. а) Девять квадратов расположены так, как показано на рис. 19, *а, б*. Сторона черного квадрата равна 1. Найдите стороны квадратов, отмеченных знаком вопроса.
б) Рис. 19, *а*, поможет вам найти какой-нибудь прямоугольник, который можно разрезать на 9 различных квадратов с целыми сторонами.

Оказывается, если прямоугольник можно разрезать на различные квадраты, то число этих квадратов не может быть меньше 9.

Возникает естественный вопрос: а на какое наименьшее число различных квадратов может быть

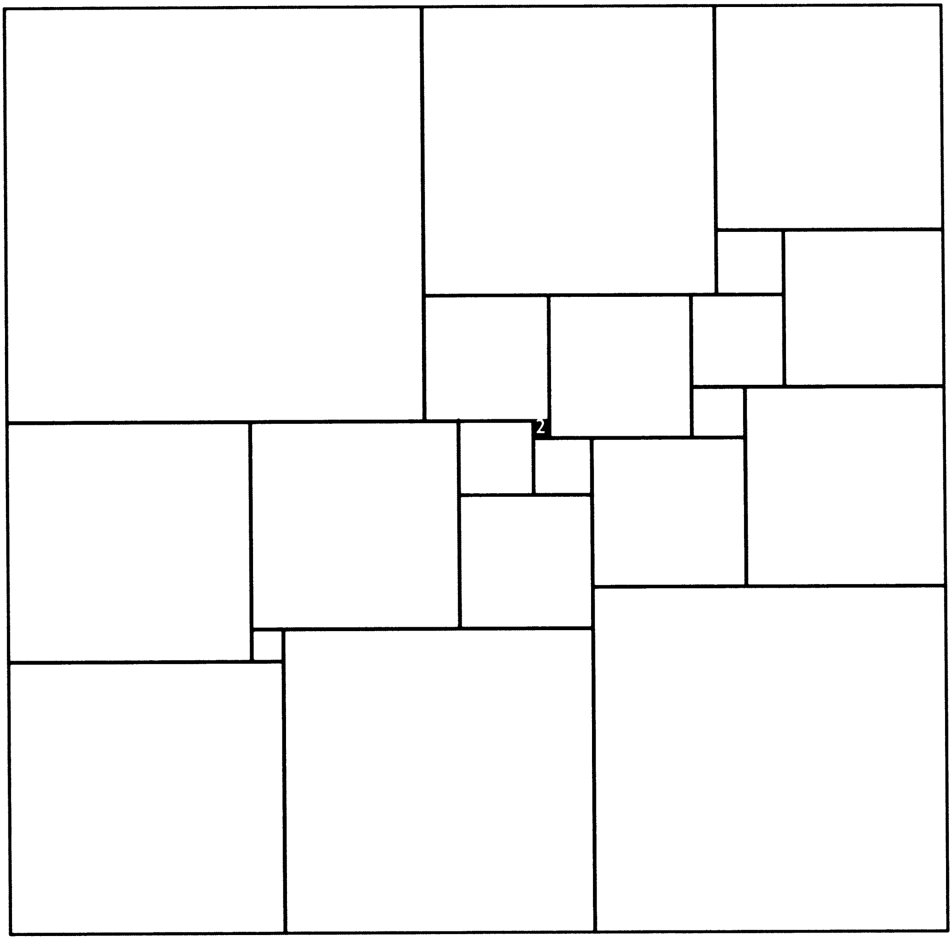


Рис. 20

разрезан квадрат? Эта задача была решена математиками не так давно. Ответ: 21. Найти нужное разрезание очень непросто. Существует единственный способ разрезать квадрат на 21 различный квадрат. Причем если потребовать, чтобы стороны всех квадратов были бы целыми числами, то наименьшим квадратом, допускающим такое разрезание, будет квадрат со стороной 112.

164. Найдите стороны всех квадратов на рис. 20, если сторона черного равна 2.

Глава 11

УГЛЫ В ОКРУЖНОСТИ

— Что такое окружность?

Не буду вас мучить и требовать, чтобы вы дали точное определение окружности. Каждый первоклассник сможет среди изображенных линий указать окружность. При этом он не будет пользоваться определением. Он просто *видит*: это — окружность, а это — нет. Он даже понимает, какая линия более *похожа* на окружность. Узнавать и распознавать образы человек умеет от рождения.

С глубокой древности для геометрических построений использовались два инструмента: линейка и циркуль. Линейка — для построения прямых линий. Циркуль — для построения окружностей. С помощью линейки мы можем проводить прямые через две точки. И всё! (У математической линейки одна сторона, на которой нет делений.) С помощью циркуля мы строим окружности.

Но, оказывается, окружность можно определять не только через циркуль... Гм-м-м. Сказано не очень хорошо, но, думаю, понятно. Решим следующую задачу.

165. На плоскости отмечены две точки: A и B. Проведем через точку A произвольную прямую и опустим на эту прямую перпендикуляр BM. (Угол AMB – прямой, то есть равен 90°.) Какую линию будет описывать точка M при изменении прямой, проходящей через A?

Задачу можно сформулировать и иначе. Например, так: рассмотрим всевозможные перпендикулярные прямые, проходящие через точки A и B. Какую линию будет описывать точка M — точка их пересечения?

Вы, конечно, догадались, что точка M должна двигаться по окружности. Иначе эта задача здесь не появилась бы. Более того, отрезок AB должен быть диаметром этой окружности. Ведь вся искомая линия должна располагаться внутри полосы, изображенной на рис. 21. Эти соображения, конечно, вполне разумны, но не являются доказательством.

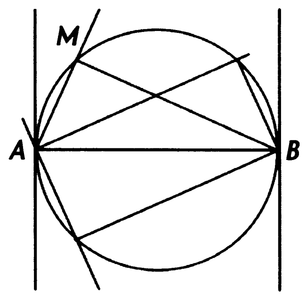


Рис. 21

Я попробую привести настоящее математическое доказательство. Но для этого нам потребуются некоторые дополнительные знания. А именно два факта (можно сказать — *две теоремы*) из геометрической теории:

— в равнобедренном треугольнике углы против равных сторон равны;

— сумма углов треугольника равна 180°.

Сейчас я постараюсь объяснить вам, *почему* верны эти утверждения. Ведь главный вопрос в математике — именно *почему*. Правда, в своих рассуждениях я буду опираться на некоторые другие факты, которые буду считать очевидными. Возможно, не все признают их (рассуждения) достаточно *строгими*. Но мне они представляются вполне *убедительными*.

Для доказательства первого утверждения нам потребуются лист бумаги и... *ножницы.* Нарисуем на листе равнобедренный треугольник (рис. 22). Как вы знаете, точнее должны знать, равнобедренный треугольник — это треугольник, у которого равны две стороны (эти две стороны называются *боковыми,* а третья сторона называется *основанием*).

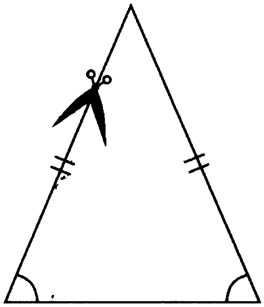


Рис. 22

Вырежем изображенный треугольник, перевернем его и поместим в образовавшееся на листе отверстие. Перевернутый треугольник полностью закроет отверстие. При этом углы при основании поменяются местами. Значит, они равны.

Здесь следует добавить, что можно *танцевать* и от углов: если в треугольнике равны два угла, то равны и соответствующие стороны, то есть такой треугольник является равнобедренным. Наше рассуждение полностью повторяется. Ну, почти полностью.

Можно, конечно, сказать, что в этом рассуждении я пользуюсь *методом симметрии.* Но мне все же нравится название *метод ножниц.* Тем более что для доказательства второго утверждения я воспользуюсь *методом спички.*

Возьмем *произвольный* треугольник... — Тут дедушка немного задумался. И даже немного больше, чем немного. — А что это такое — произвольный треугольник? И как его можно взять? Давайте лучше так: *рассмотрим любой* треугольник. — Дедушка вновь задумался. — А это как надо понимать? Беда с этим языком.

Ну да ладно. Вот треугольник, а вот спичка. Положим спичку на одну из сторон треугольника и начнем перемещать по стороне в каком-то направлении, пока не дойдем до вершины треугольника, до угла (рис. 23). Здесь повернем спичку на угол, равный углу треугольника, и будем перемещать ее по второй стороне. Затем так же перейдем на третью сторону. После третьего поворота мы вернемся на исходную

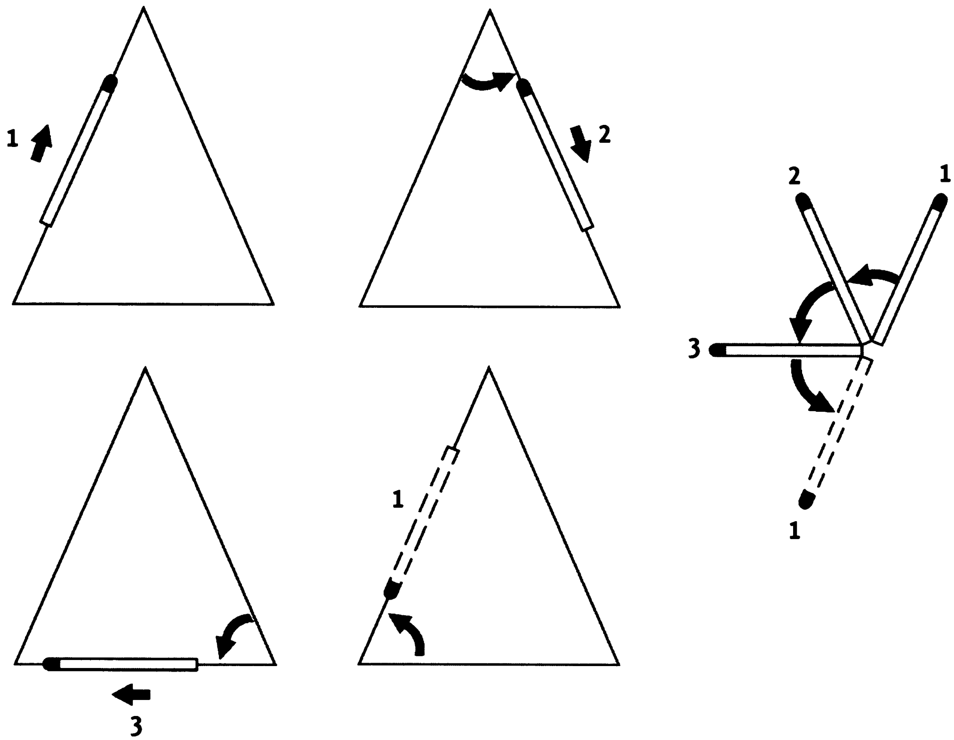


Рис. 23

сторону. Спичка при этом повернется на 180°. Чтобы в этом убедиться, полезно еще одну спичку поместить где-нибудь на плоскости, например внутри треугольника, и поворачивать ее одновременно с первой спичкой. А поскольку суммарный поворот спички равен сумме углов треугольника, получим, что сумма углов рассматриваемого треугольника равна 180°. Но на его месте мог быть любой треугольник. Значит, сумма углов любого треугольника равна 180°.

166. Чему равна сумма углов четырехугольника, пятиугольника, 2004-угольника?

167. Найдите углы, отмеченные на рисунках (рис. 24) знаком вопроса.

168. С помощью метода спички найдите суммы углов пятиконечной и двух семиконечных звезд, изображенных на рис. 25.

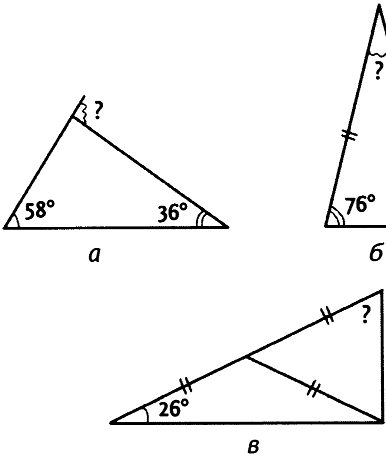


Рис. 24

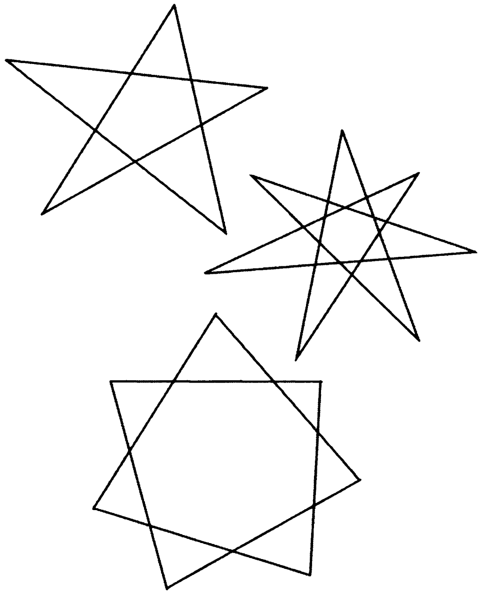


Рис. 25

А теперь вернемся к задаче 165. Построим окружность с диаметром AB и точку K на ней (рис. 26). Соединим K с центром окружности, точкой O. Рассмотрим два треугольника: KOA и KOB. Оба они равнобедренные. Боковые стороны равны радиусу окружности. Обозначим в первом треугольнике равные углы через x, а во втором — через y. Тогда в треугольнике AKB два угла равны x и y, а один угол (угол AKB) равен $x + y$. Но сумма углов треугольника равна 180°. Значит, $x + y + (x + y) = 180^\circ$. И теперь получим, что $x + y = 90^\circ$. Угол AKB — прямой. То есть точка M, о которой мы говорили в условии задачи 165, совпадает с точкой K.

169. Точки A, B и C расположены на окружности с центром в O. Угол AOB равен 100°. Чему может равняться угол ACB?

170. Рассмотрим треугольник AOB (рис. 27). Докажите, что угол MOA равен сумме углов OAB и OBA.

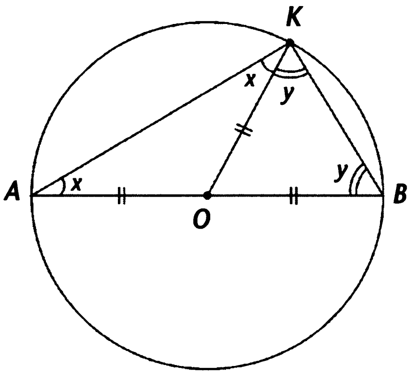


Рис. 26

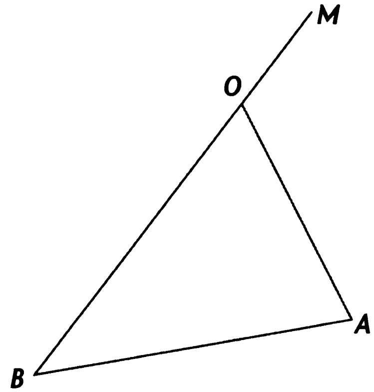


Рис. 27

Из задачи 170 и свойства равнобедренного треугольника *следует* важное *следствие*. Если треугольник AOB ($AO = OB$) равнобедренный, то угол MOA в 2 раза больше каждого из углов OAB и OBA.

Теперь нетрудно получить одно важное, возможно самое важное, утверждение про окружность и углы.

171. Возьмем окружность с центром в точке O. Пусть A и B — две точки на окружности. Возьмем на окружности точку M, расположенную по ту же сторону от прямой AB, что и точка O. Тогда угол AOB в 2 раза больше угла AMB (рис. 28).

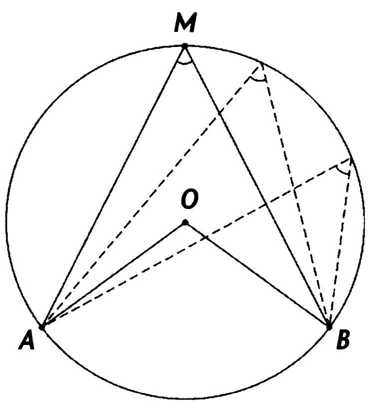


Рис. 28

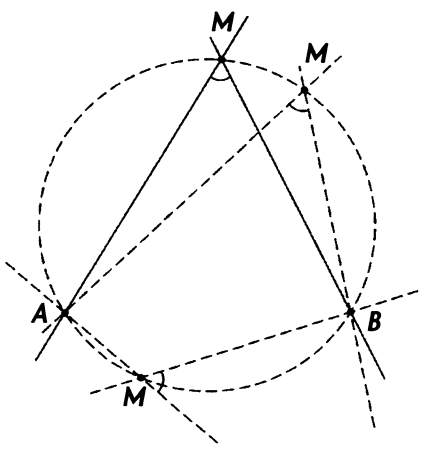


Рис. 29

А лучше сказать, что угол AMB в 2 раза меньше угла AOB. Докажите это. Данное утверждение означает, что при перемещении точки M по дуге окружности угол AMB не меняется.

172. Отметим на плоскости две точки: A и B. Проведем через них две пересекающиеся прямые. Пусть они пересекутся в точке M (рис. 29). Будем рассматривать эти прямые как два длинных стержня, лежащих на плоскости и жестко соединенных в точке M. Начнем перемещать эти стержни по плоскости, не отрывая от нее, так, что один из стержней все время проходит через точку A, а другой – через точку B. Какую линию описывает при этом точка M?

Из результата предыдущей задачи мы легко получим, что точка M описывает окружность. Здесь следует заметить, что величина угла AMB меняется, когда точка M переходит по другую сторону прямой AB. (Сумма соответствующих углов равна 180°.) Исключение составляет случай, когда оба эти угла равны 90°.

А теперь решим несколько задач на построение. Я уже говорил, что в соответствии с древними геометрическими традициями при решении задач на построение мы можем пользоваться лишь двумя инструментами: линейкой и циркулем. Если, конечно, в условии задачи нет никаких дополнительных условий.

При этом в каком-то смысле главным инструментом является циркуль. Дело в том, что любые построения циркулем и линейкой могут быть выполнены одним циркулем. За исключением, конечно, проведения прямой через две точки. Например, если на плоскости отмечено несколько точек, то мы можем одним циркулем найти точки пересечения любых прямых, задаваемых этими точками. Но сделать это очень непросто. И не всякий даже очень хороший математик умеет делать это и многие другие подобные построения. К сожалению, искусство решения задач на построение постепенно забывается. И очень жаль.

Но мы начнем с простого. Хотя и не простейшего.

Я полагаю, что любой из вас, пользуясь циркулем и линейкой, сможет построить треугольник, равный данному треугольнику. Ведь треугольник полностью определяется своими сторонами. Значит, мы легко можем построить и угол, равный данному углу. А какие углы мы можем построить с помощью циркуля и линейки?

173. Постройте углы в 180°, 90°, 60°.

Эта задача, конечно, очень простая, хотя можно и спросить: а разве угол в 180° — это угол?

Конечно, это некоторая условность. Такой угол называют *развернутым* (а существуют ли *завернутые* углы?), хотя, конечно, это не совсем угол.

174. Дан угол, то есть на плоскости изображен угол. Постройте угол в 2 раза меньше данного.

Решить предложенную задачу можно разными способами. Очень просто это можно сделать, используя утверждение задачи 171.

Итак, какой бы угол ни был задан, мы можем построить угол в 2 раза меньше. Это означает также, что мы можем делить угол на две равные части, пополам. (Линия, которая делит угол на две равные части, называется *биссектрисой.*) А можно ли разделить угол на три равные части? Эта задача является одной из трех классических древних задач. Деление угла на три равные части называется *трисекцией* угла. Две другие задачи — это *удвоение куба* и *квадратура круга.* Задача об удвоении куба состоит в построении отрезка, равного ребру куба, объем которого ровно в 2 раза больше объема данного куба.

175. Разрежьте два равных квадрата на части, из которых можно сложить квадрат. Разрежьте три равных квадрата на части, из которых можно сложить квадрат. (Иными словами, решите задачи об удвоении и утроении квадрата.)

Задача о квадратуре круга состоит в построении квадрата, равновеликого (то есть имеющего ту же площадь) данному кругу.

Задачи эти возникли в глубокой древности. Долгое время ученые, математики и не только они, пытались решить эти задачи. Но лишь в XIX веке математики смогли доказать, что все эти три задачи неразрешимы с помощью циркуля и линейки. Конечно, речь идет о точном решении. Приближенно, причем сколь угодно точно, эти задачи решить можно. И все же и поныне время от времени появляются люди, пытающиеся решить указанные проблемы. И в новостях время от времени сообщают о появлении очередного народного умельца, который справился с квадратурой круга. Почему-то именно эта проблема кажется особенно привлекательной.

Велика математическая неграмотность в нашем обществе! — горестно покачал головой дедушка. — Между прочим, задача о квадратуре круга в некотором смысле самая неразрешимая из всех трех задач. Нетрудно придумать достаточно простые инструменты, с помощью которых можно решать две другие задачи. Например, если на обычной линейке нанести две метки, то с помощью такой линейки и циркуля можно делить любой угол на три равные части следующим образом.

176. Рассмотрим угол с вершиной O. Построим окружность с центром в O и радиусом, равным расстоянию между метками на линейке. Пусть эта окружность пересекает стороны угла в точках A и B. Поместим линейку так, чтобы одна из отметок находилась на продолжении OB (точка C), другая — на окружности (точка D) и при этом точки C, D и A лежали бы на одной прямой (рис. 30). Тогда угол ACB будет ровно в 3 раза меньше угла AOB. Почему?

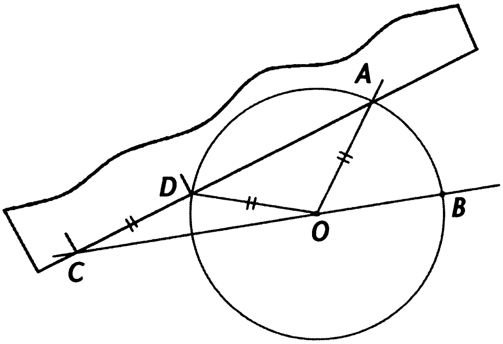


Рис. 30

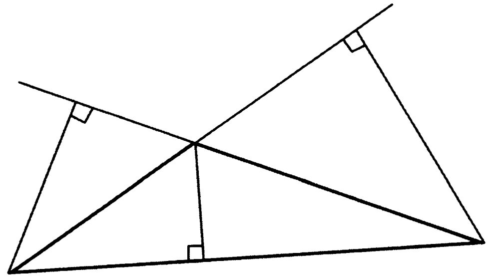


Рис. 31

А теперь я... Точнее, мы все вместе докажем одну важную и красивую теорему по геометрии.

177. Высоты треугольника пересекаются в одной точке.

Все ли знают, что такое высота треугольника?

Напомню. *Высота* — это перпендикуляр, проведенный из вершины треугольника к противоположной стороне. Высота — это отрезок прямой. У каждого треугольника есть три высоты. У остроугольного треугольника все три высоты расположены внутри него. У тупоугольного — одна внутри, а две — вне него.

Давайте внимательно прочитаем формулировку нашей теоремы (задача 177).

По глазам вижу: многие уже поняли, что в предложенной формулировке и при данном нами определении понятия «высота» это утверждение не может быть верным. Ведь у тупоугольного треугольника никакие две высоты вообще не пересекаются (рис. 31). Точная формулировка может звучать, например, так.

177. а) Три прямые, содержащие высоты треугольника, пересекаются в одной точке.

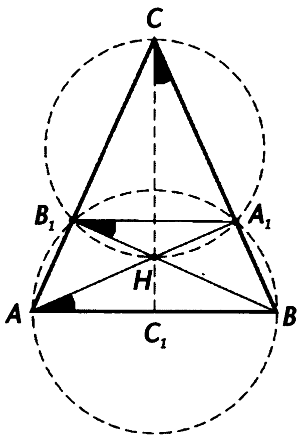


Рис. 32

Формулировка 177, *а,* звучит менее красиво, чем 177, но зато является более *точной*, а *точнее* совсем *точной*. На мой взгляд, особой беды не будет, если вы запомните формулировку задачи 177. Важно понимать суть.

Известно очень много доказательств теоремы о высотах. Приведу одно. Возьмем треугольник ABC (рис. 32). Пусть он будет остроугольным. Проведем две высоты: AA_1 и BB_1. Обозначим через H точку их пересечения. Пусть прямая CH пересекает сторону AB в точке C_1. Нам надо доказать, что CC_1 — высота в треугольнике ABC.

Как мы знаем (задача 165), окружность с диаметром AB содержит точки A_1 и B_1. Из задачи 171 следует, что углы BB_1A_1 (он же угол HB_1A_1) и BAA_1 равны.

Вновь воспользуемся утверждением задачи 165. Окружность с диаметром CH содержит точки A_1 и B_1. Значит, угол HCA_1 (он же угол C_1CB) равен...

Я надеюсь, что теперь вы сами сможете закончить решение — доказательство задачи 177, *а*. Для рассматриваемого случая — остроугольного треугольника.

А как быть в случае тупоугольного треугольника? Оказывается, мы рассмотрели и этот случай.

В самом деле, начнем доказывать. Рассмотрим треугольник AHB с тупым углом при вершине H. Проведем высоты AB_1 и BA_1 и продолжим их до пересечения в точке C. (Ведь обозначить треугольник и другие точки мы можем *как угодно*, как угодно и удобно нам.) И т. д. Мы получили ту же самую картинку, что и ранее.

178. В треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1 и CC_1, H — точка их пересечения (или их продолжений). Среди точек A, B, C, A_1, B_1, C_1 и H укажите всевозможные четверки, лежащие на одной окружности.

179. Через точку O плоскости проведены три прямые, делящие плоскость на шесть равных углов. Возьмем произвольную точку M плоскости и опустим из нее перпендикуляры MA, MB и MC на данные прямые. Найдите углы треугольника ABC.

180. Любой треугольник можно разрезать на четыре треугольника такого же вида, но в 2 раза меньших. Существуют и другие фигуры, которые также можно разрезать на четыре вдвое меньшие фигуры (см. задачу 10). Найдите треугольник, который можно разрезать на три треугольника такого же вида.

181. На окружности взяты точки A, B и C. Известно, что угол BAC равен 72°, а угол BCA равен 28°. На окружности взяты точки A_1, B_1 и C_1 так, что $BA_1 = BA$, $CB_1 = CB$, $AC_1 = AC$. Найдите углы треугольника $A_1 B_1C_1$.

Глава 12

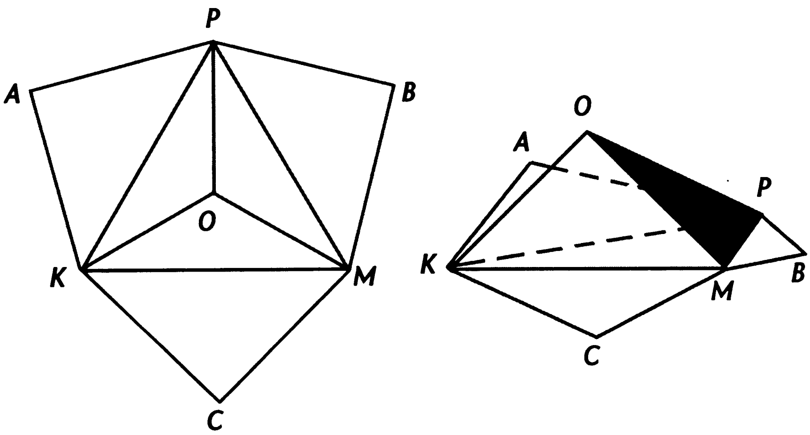
УМНЫЙ В ГОРУ НЕ ПОЙДЕТ...

...Умный гору обойдет.

182. На рис. 33 *а, б,* изображена некоторая территория (рис. 33, *а,* – это вид сверху). В точках *A*, *B* и *C* находятся три деревни. Деревни разделяет гора в виде треугольной пирамиды. На рисунке треугольник *KPM* является основанием горы, а точка *O* – ее вершиной. Все треугольники: *AKP*, *BPM*, *CMK*, *KPO*, *MKO* и *PMO* – являются равнобедренными прямоугольными треугольниками. У первых трех прямые углы при вершинах *A*, *B* и *C*, а у трех последних – при вершине *O*. Каждая деревня соединена с двумя другими дорогой. При этом любые две соединены кратчайшей дорогой. Укажите дороги, соединяющие деревни.

Исходя из заглавия, вы легко поймете, что указанные дороги — это ломаные *APB*, *BMC* и *CKA*. Итак, ответ получен. Осталось... решить задачу.

В жизни нам нередко приходится определять, какой выбрать путь (и в прямом и в переносном смысле), какой маршрут короче, какой удобнее и прочее.



а Рис. 33 б

Все знают, что самым коротким путем между двумя точками является прямая линия, отрезок прямой, соединяющий эти две точки. Это если и не знают, то *осознают* и животные. Ни один муравей, направляясь к себе в муравейник, не будет двигаться по какой-нибудь *замысловатой* кривой. Если, конечно, для этого нет какой-нибудь *веской* причины.

183. А как найти кратчайший путь между точкой A и прямой?

Сформулируем эту задачу аккуратно. Имеется прямая и точка A, не лежащая на этой прямой. Постройте на прямой точку B, ближайшую к точке A, то есть точку, для которой длина отрезка, соединяющего A с точкой на прямой, будет наименьшей.

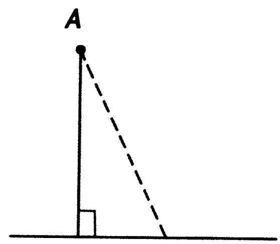


Рис. 34

Я думаю, что все знают ответ к этой задаче: отрезок AB должен быть перпендикулярен прямой, то есть надо опустить из A перпендикуляр на прямую (рис. 34).

184. Даны окружность и точка A. Найдите на окружности точку B, ближайшую к A.

Этой и последующим задачам нетрудно придать практически полезный вид. Например, найти рас-

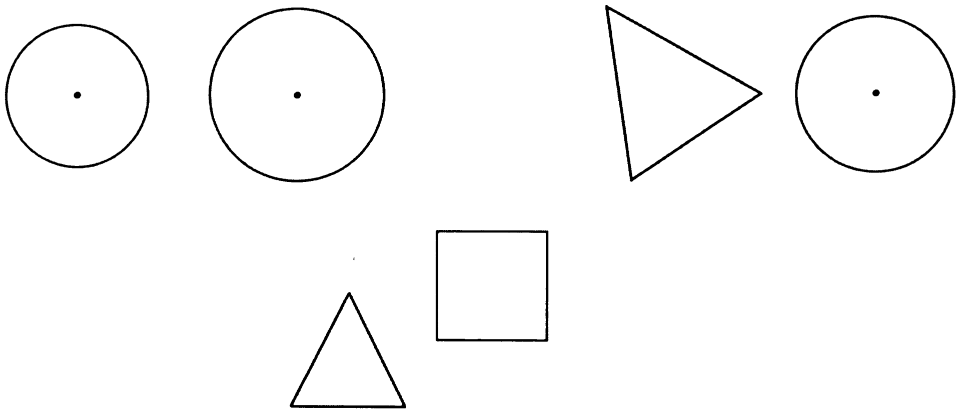


Рис. 35

стояние от деревни до круглого озера. Это для случая, когда A вне окружности. Или найти на кольцевой дороге, окружающей ваш город, точку, ближайшую к вашему дому. И т. п. Но я этого делать не буду. Математические задачи интересны сами по себе, и их не обязательно раскрашивать в развлекательные цвета.

А что касается расстояний, то можно рассматривать не только расстояния от точки до точки или до фигуры, но и расстояния между двумя фигурами. Понятно, что расстояние между двумя фигурами равно расстоянию между ближайшими точками этих фигур.

185. На рис. 35 изображено несколько пар фигур. Для каждой пары укажите ближайшие точки этих фигур.

Но не всегда от одной точки до другой можно пройти по прямой. Уже в задаче 182 описан именно такой случай. Когда мы движемся по поверхности какого-нибудь тела, особенно многогранника, то помочь нам может *развертка*.

186. Рассмотрим две полуплоскости с общей границей (рис. 36). Пусть *A* и *B* – две точки, расположенные в разных полуплоскостях. Постройте самый короткий путь, соединяющий эти точки и лежащий в заданных полуплоскостях. (Подобные задачи очень любят формулировать с помощью «мух и пауков». На одной стене комнаты в точке *A* сидит паук, который хочет добраться до мухи, сидящей в точке *B* на соседней стене. Постройте для этого паука самый короткий путь.)

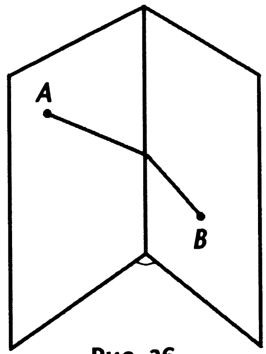


Рис. 36

Задача эта решается очень легко. Надо «развернуть» на плоскость две заданные полуплоскости, две «стены», а затем соединить точки A и B отрезком прямой.

При этом понятно, что длина кратчайшего пути не зависит от величины угла между полуплоскостями, между соседними «стенами».

А теперь решим одну очень важную «классическую» задачу.

187. На плоскости проведена прямая и отмечены две точки *A* и *B* по одну сторону от этой прямой. Надо на прямой найти точку *M* так, чтобы сумма *AM* + *MB* являлась наименьшей.

И этой задаче нетрудно придать развлекательный вид. Например, так.

Прямая — это берег реки. В точках A и B находятся школа и дом мальчика. Мальчик после школы хочет сбегать на речку искупаться и только после этого отправиться домой. В каком месте ему следует искупаться, если он хочет сделать свой путь как можно более коротким? (На самом деле такая постановка задачи не имеет большого практического смысла. Купаться следует там, где удобнее.)

Обычно при решении этой задачи используют метод симметрии. Мы поступим несколько иначе, хотя по сути так же.

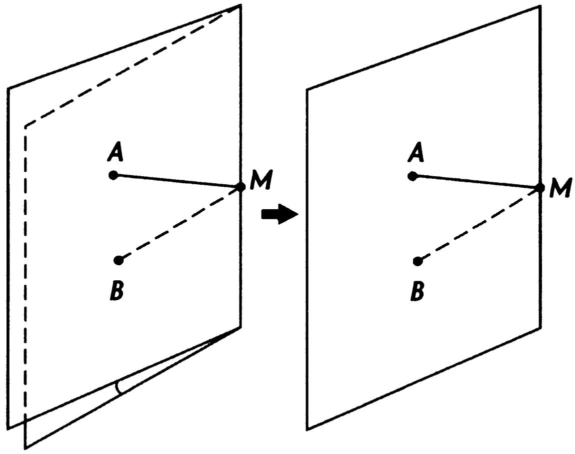


Рис. 37

Представим себе, что у нас имеется полуплоскость, ограниченная заданной прямой. Точка A находится с одной стороны этой полуплоскости («сверху»), а точка B — с другой («снизу»), и «пауку» надо переползти на другую сторону (через прямую — границу полуплоскости) полуплоскости, чтобы добраться до «мухи». Вернемся к задаче 186. Как мы отметили, путь на развертке не зависит от величины угла между полуплоскостями. Возьмем случай, когда этот угол равен нулю, полуплоскости склеились (рис. 37, математик мог бы сказать: рассмотрим *предельный* случай). И мы получаем задачу 186.

Думаю, теперь вы без труда закончите решение задачи.

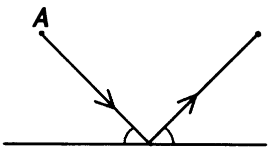


Рис. 38

Обратите внимание, для найденной точки M отрезки AM и BM образуют равные углы с заданной прямой. Как говорят физики, *угол падения равен углу отражения* (рис. 38). Именно по этому закону движется луч света или бильярдный шар.

Луч света, отражаясь от зеркала или преломляясь при переходе из одной среды в другую (например, из воздуха в воду), движется по кратчайшему пути, а вернее — по наибыстрейшему пути.

188. Дан угол и внутри него две точки: *A* и *B*. Найдите на сторонах угла точки *K* и *M* так, чтобы длина ломаной *AKMB* (*AK* + + *KM* + *MB*) была бы наименьшей.

Хорошо бы нам не только уметь находить кратчайшие пути, но и научиться сравнивать длины различных путей. Вычислять их. Так ли уж велик выигрыш? Может, не стоит и *огород городить*? (А вы, кстати, умеете огород городить?) И здесь нам не обойтись без важнейшей теоремы не только геометрии. Не только математики. Но и всей науки! Речь идет о теореме ПИФАГОРА!

Сначала я кое-что напомню. Площадь квадрата, как известно, равна квадрату длины его стороны. Для любого числа нетрудно найти его квадрат. Но если мы знаем квадрат числа, то мы можем найти и само число. Если квадрат числа равен 16, то само число равно 4. Но не только! Ведь $(-4)^2 = 16$. То есть уравнение $x^2 = 16$ имеет два решения (два корня) $x = \pm 4$.

Но мы сейчас занимаемся геометрией, и отрицательные числа нам не нужны. Пока не нужны.

Для положительных чисел введем операцию, обратную возведению в квадрат. Эта операция называется «извлечение квадратного корня». Для любого неотрицательного числа a обозначим через $\sqrt{a}$ неотрицательное число, квадрат которого равен a. То есть

$$(\sqrt{a})^2 = a$$

$$(a \geq 0, \sqrt{a} \geq 0).$$

Записанное здесь равенство и два неравенства и есть определение операции *извлечения квадратного корня*. (Красиво звучит, не так ли?) Конечно, слова «неотрицательные числа» и неравенство $\geq$ нам нужны лишь для того, чтобы не потерять 0. Как правило, мы будем иметь дело лишь с положительными числами.

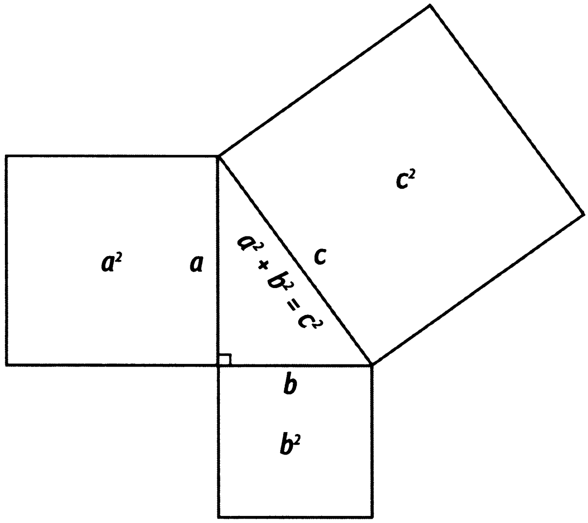


Рис. 39

Таким образом, $\sqrt{16} = 4$.

Но не для всякого натурального числа существует натуральное число, равное корню квадратному из него. Например, числа $\sqrt{2}$, $\sqrt{11}$ не только не являются целыми, они даже не рациональны (то есть не являются дробями). Эти числа *иррациональные.*

Надо сказать, что число $\sqrt{2}$ сыграло очень важную роль в истории математики, в истории геометрии. И об этом можно написать и роман, и поэму. Но это мне не по силам.

Пора переходить к самой теореме Пифагора.

Рассмотрим прямоугольный треугольник. Надеюсь, вы знаете, что стороны этого треугольника, образующие прямой угол, называются *катетами*, а сторона против прямого угла — *гипотенузой.* Если мы на сторонах прямоугольного треугольника во внешнюю сторону построим квадраты, то получим знаменитую картинку (рис. 39), которую с давних пор российские школяры называли *пифагоровыми штанами.* А теорему Пифагора они формулировали следующим образом: *пифагоровы штаны во все стороны* *равны.* Признаться, я не совсем понимаю, при чем здесь теорема Пифагора. Но такова история.

Теорема же Пифагора утверждает: сумма площадей квадратов, построенных на катетах прямоугольного треугольника, равна площади квадрата, построенного на его гипотенузе. Или: сумма квадратов катетов прямоугольного треугольника равна квадрату его гипотенузы Или:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Здесь через a, b и c обозначены (как это обычно принято) длины катетов и гипотенуза прямоугольного треугольника.

Известно великое множество доказательств теоремы Пифагора. Геометрических и алгебраических. Я приведу лишь одно. Самое красивое, на мой взгляд. Геометрическое.

Рассмотрим два равных квадрата со стороной $a + b$. Первый разрежем на четыре прямоугольных треугольника и один квадрат, а другой — на четыре таких же прямоугольных треугольника и два квадрата. Как показано на рис. 40, *а, б*. Понятно, что площадь внутреннего квадрата на рисунке 40, *а* равна

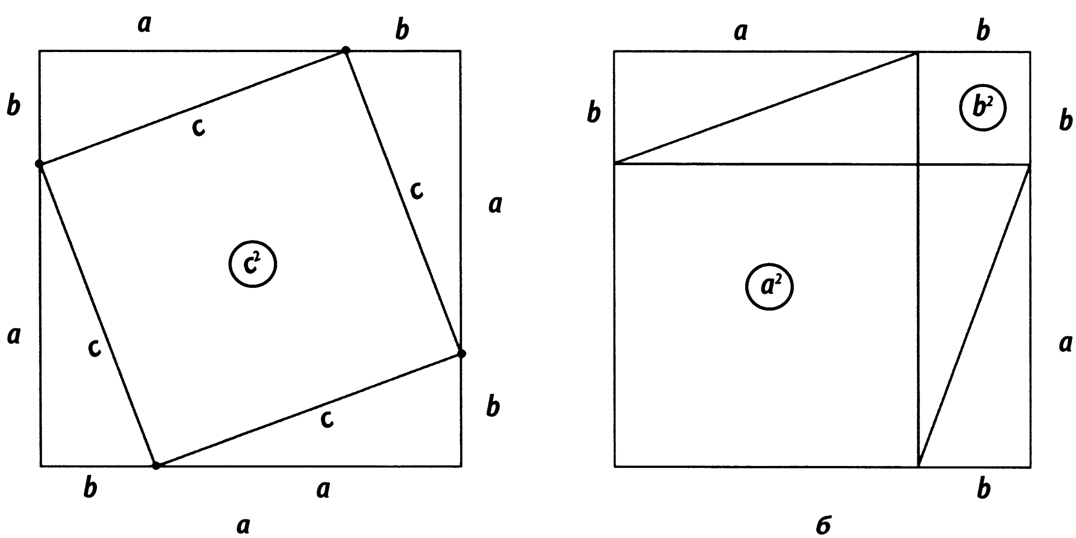


Рис. 40

сумме площадей двух маленьких квадратов на рисунке 40, *б*. Но именно в этом и состоит теорема Пифагора.

Среди различных прямоугольных треугольников особой популярностью, можно даже сказать любовью, пользуются так называемые Пифагоровы треугольники. Пифагоровыми (или египетскими) называют прямоугольные треугольники, у которых длины всех сторон равны целым числам. Самый знаменитый треугольник — треугольник со сторонами 3, 4 и 5. Немного менее популярен треугольник со сторонами 5, 12 и 13.

189. Возьмем произвольные натуральные числа m и n. Проверьте, что треугольник, стороны которого равны $m^2 - n^2$ (считаем, что $m > n$), $2mn$ и $m^2 + n^2$, является прямоугольным. (Здесь следует заметить, что равенство $a^2 + b^2 = c^2$ является не только свойством прямоугольного треугольника. Это также и признак прямоугольного треугольника.) Теорема Пифагора дает нам возможность вычислять длины различных путей, не измеряя их.

190. Мы знаем, что кратчайшим путем от точки до прямой является путь по перпендикуляру к прямой. А сколь велик будет проигрыш, если мы немного отклонимся от перпендикуляра? Например, вы собираетесь переплыть речку, ширина которой равна 50 м. Но вы немного отклонились и приплыли в точку, находящуюся на расстоянии 1 м от ближайшей к месту старта. Оцените величину, на которую удлинился ваш путь (пользоваться калькулятором нельзя).

А теперь решим одну задачу. Думаю, вы очень удивитесь, когда получите ответ.

191. Спортивный зал имеет форму параллелепипеда (понятно, что прямоугольного). Его высота равна 6 м, а размеры пола 6×15 м. На стенке 6×6 м на высоте 0,5 м и на равном расстоянии от ближайших углов комнаты сидит паук. На противоположной стенке на расстоянии 0,5 м от потолка и также на равном расстоянии от ближайших углов сидит, разумеется, муха. Понятно, что требуется найти длину

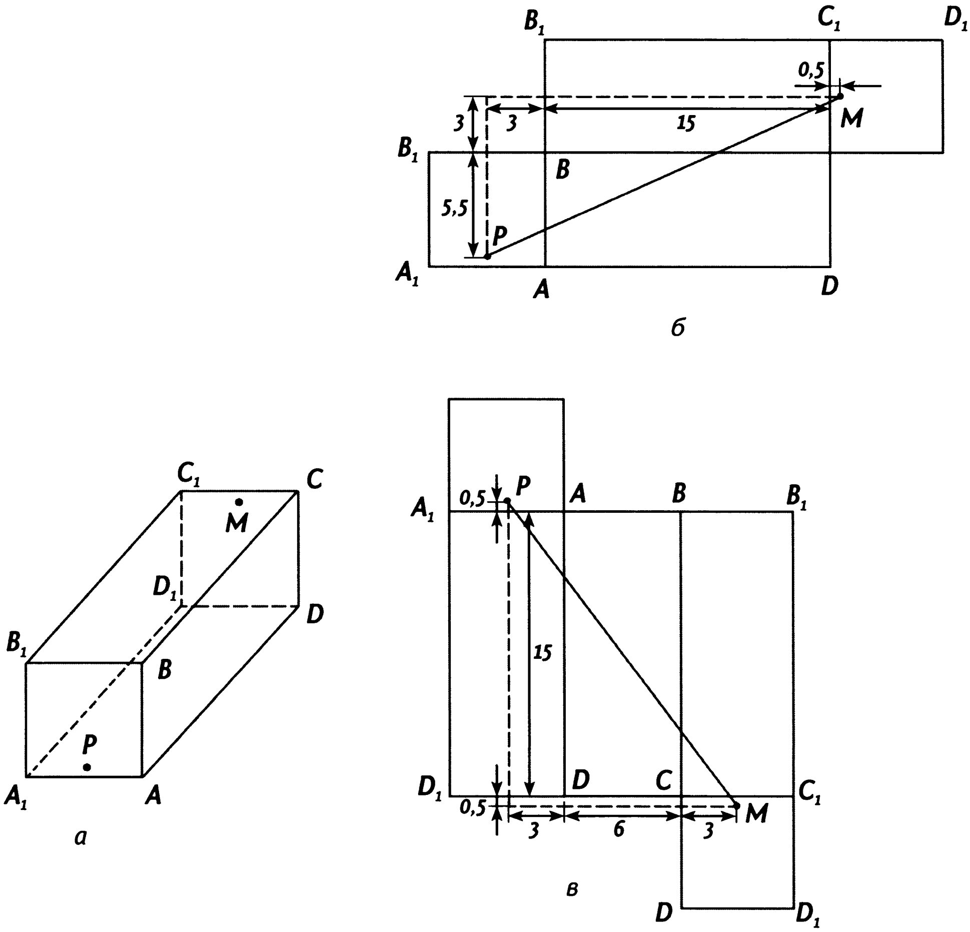


Рис. 41

кратчайшего пути от паука к мухе с учетом того, что пауки не умеют летать.

Давайте рассмотрим различные пути, соединяющие паука с мухой. (На рис. 41, *а,* паук обозначен буквой P, а муха — буквой M.)

1. Паук может ползти по следующему маршруту: вверх на потолок, затем по потолку до противоположной стены и вниз к мухе. Чтобы найти длину этого пути, можно обойтись и без разверток и без теоремы Пифагора.

2. Паук может направиться к ближайшему углу комнаты, затем по боковой стене добраться до потолка, по потолку доползти до противоположной стены и направиться к мухе. (По пути он пересечет AB, BC и CC_1.) Здесь уже придется делать развертку. Всякий раз, когда паук переползает на другую стену, будем «разворачивать» соседние грани. В результате получим развертку, как на рис. 41, *б*. Теперь нам надо соединить точки P и M на этой развертке отрезком прямой линии и вычислить его длину. Здесь без теоремы Пифагора нам не обойтись.

Казалось бы, этими двумя возможностями и исчерпываются все разумные пути для паука. И вторая чуть лучше. Значит, она и дает нам ответ?

Ан нет! Паук, если он разумен (необычайно разумен!) и не боится быть раздавленным (вот и подсказка!), изберет третий путь. Какой? Впрочем, вряд ли пауку так уж важно найти самый короткий путь. Гораздо важнее для него (если считать его разумным) найти более быстрый и даже более удобный, более безопасный путь.

Да и человек в практической жизни обычно стремится добраться до места назначения как можно быстрее или же по возможности дешевле, если он пользуется общественным транспортом. Рассмотрим следующую задачу.

192. Автобусная станция находится на шоссе, а дом мальчика в стороне от шоссе. Можно сказать, в чистом поле. Обозначим автобусную станцию буквой *А*, а дом — буквой *Д* (рис. 42). Добраться до своего дома от станции мальчик может, если пройдет по шоссе 6 км, а затем свернет и будет двигаться по перпендикуляру к шоссе еще 3 км. По шоссе мальчик идет со скоростью 5 км/ ч, а по полю со скоростью 3 км/ч. Указанный маршрут позволяет мальчику добраться до дома за 2 часа 12 минут. Понятно, что указанный путь не самый быстрый. Какой путь должен избрать мальчик, если он желает дойти до дома как можно быстрее?

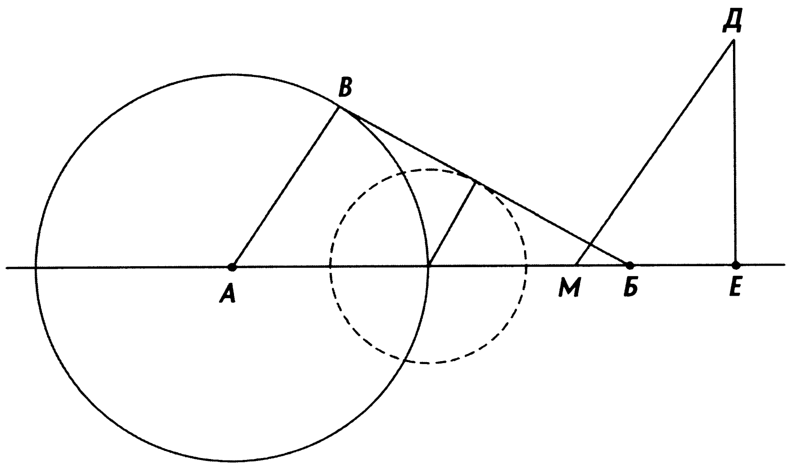


Рис. 42

Эта задача достаточно трудна. И ее решение, которое я хочу рассказать, основано на очень *глубокой* идее.

Давайте попробуем изобразить все точки, до которых мальчик может добраться за какое-то время. Пусть за 1 час.

Понятно, что за 1 час (и быстрее) он может добраться до любой точки внутри круга с центром в A и радиусом 3 км. Он также может добраться до точки $Б$ на шоссе на расстоянии 5 км от A. (Возьмем точку $Б$ по направлению к дому мальчика.)

Рассмотрим прямоугольный треугольник с катетами 3 км, 4 км и гипотенузой 5 км. (Я же говорил, что этот треугольник чаще всего используется в геометрических задачах.) И расположим его так, как показано на рисунке ($AБ = 5, AB = 3, BБ = 4$). Вершина прямого угла — точка B — лежит на окружности радиуса 3 с центром в A. А вся прямая $БB$, кроме точки B, лежит вне окружности (ведь перпендикуляр AB — кратчайшее расстояние от A до $БB$). Эта прямая *касается* нашей окружности.

Предположим, мальчик прошел по направлению к $Б$ полчаса, а затем свернул в поле. Тогда он может достичь любой точки внутри круга радиуса 1,5 км с центром в середине *АБ*. Этот круг также коснется *БВ* в середине. И чтобы добраться до середины *АБ* за 1 час, мальчику надо дойти до середины *АБ*, а затем идти по перпендикуляру к *БВ*.

И вообще, за 1 час мальчик может дойти до любой точки на отрезке *БВ*. Для этого ему следует пройти соответствующее расстояние по шоссе, а затем двигаться по перпендикуляру к *БВ*. То есть параллельно *АВ*. При этом ни до одной точки на отрезке *БВ* мальчик не может добраться быстрее, чем за 1 час.

Таким же образом мы можем построить все точки, до которых мальчик может добраться за 1,5 часа. Самые дальние из них заполняют отрезок, который в 1,5 раза дальше от *А*, чем *БВ*.

Здесь важно, что мальчик, чтобы добраться до дома по возможности быстрее, должен дойти до некоторой точки на шоссе (обозначим ее буквой *М*), а затем двигаться к дому. При этом точку *М* надо выбрать так, чтобы прямая *МД* была параллельна *АВ*.

Для завершения решения задачи остается произвести несложные арифметические вычисления.

Я говорил раньше, что луч света выбирает самый быстрый путь. Когда свет переходит из одной среды в другую, меняя свою скорость, то он меняет направление по *закону преломления*. Я не буду формулировать этот закон, поскольку формулируется он на языке *тригонометрии*, который вам пока еще не известен. Попробуйте решить еще одну задачу. В конце книги дается решение этой задачи и показано, как из нее (точнее, из соответствующего общего случая) можно вывести закон преломления.

193. Школа и дом мальчика расположены по разные стороны от шоссе на расстояниях соответственно 2 км и 1 км от шоссе. Расстояние между ближайшими к школе и дому точками на шоссе равно 3 км. По шоссе мальчик идет со скоростью 5 км/ч. По полю между школой и шоссе – со скоростью

3 км/ч. По полю между домом и шоссе — со скоростью 4 км/ч. За какое наименьшее время мальчик может дойти от школы до дома?

Физика нередко подсказывает математикам ответы при решении важных практических задач. Рассмотрим следующую очень важную задачу. Эта задача начинает серьезное направление в современной геометрии.

194. На плоскости отмечены три точки: A, B и C. Постройте точку T, для которой достигает наименьшего значения сумма $AT + BT + CT$.

Как эту задачу можно решить с помощью физики?

Представим себе, что наша плоскость изготовлена из тонкого материала (например, фанеры) и расположена параллельно плоскости земной поверхности (будем, как древние люди, считать Землю плоской). Проделаем в точках A, B и C небольшие отверстия и пропустим в эти отверстия по веревочке (рис. 43). Не очень длинные. Верхние концы веревочек мы свя-

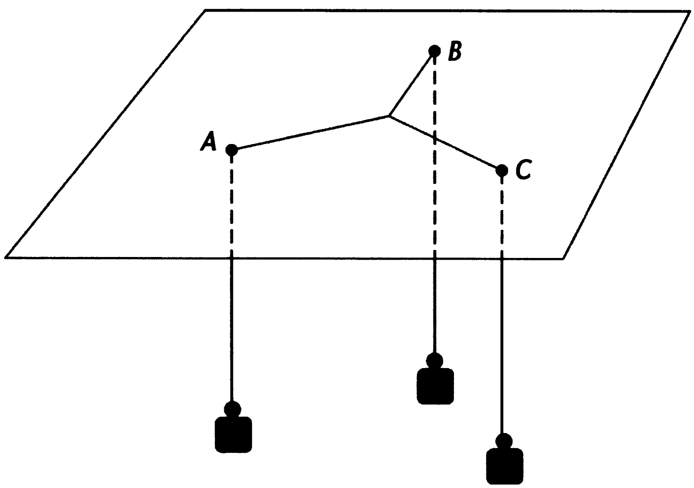


Рис. 43

жем вместе, а к противоположным привяжем равные грузы. Скажем, в 1 кг.

Согласно законам физики, грузы должны занять положение, при котором сумма расстояний до земли будет наименьшей. С другой стороны, вся наша система грузов и веревочек должна оказаться, как говорят физики, *в положении равновесия.* Будем считать, что узелок не провалится ни в одно отверстие. Тогда сумма расстояний от узелка до A, B и C должна быть наименьшей. Значит, узелок займет положение искомой точки T.

Что же получается? В точке T сходятся три веревочки, и за каждую мы тянем с одной и той же силой (говорят, к точке E приложены три силы). А точка E никуда не перемещается (получилось как в известной басне про лебедя, рака да щуку). Это возможно, если все углы — ATB, BTC и CTA — равны между собой и равны 120° каждый.

Такая точка найдется, если все углы треугольника ABC меньше 120°. Если же в треугольнике есть угол, который больше или равен 120°, то точка T должна совпасть с соответствующей вершиной треугольника. (Узелок провалится в соответствующее отверстие.)

Итак, физика помогла найти нам нужную точку. Ее называют иногда точкой Торричелли (отсюда и буква T), по имени известного итальянского ученого XVII века. Ее называют также и точкой Ферма по имени французского математика того же XVII столетия. И кто прав, а кто нет, разобраться трудно. В науке так бывает часто.

И все же приведенное рассуждение нельзя считать *полноценным* доказательством. С точки зрения математики. А ведь нас волнует именно эта точка зрения.

Приведу и настоящее математическое доказательство. Оно не очень простое. Хотя, я уверен, кое-кто из вас, подумав некоторое время — день, два, неделю, а то и месяц, смог бы его найти. Но я вынужден лишить их этого удовольствия.

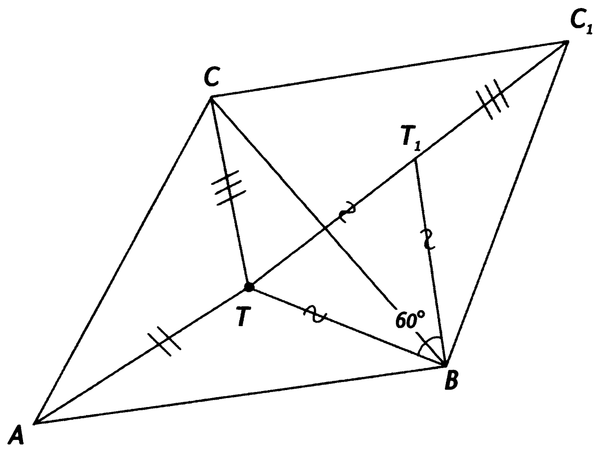


Рис. 44

Сначала одно очень простое и очевидное *соображение*.

195. Если у равнобедренного треугольника один угол (любой) равен 60°, то этот треугольник равносторонний.

Ну а теперь вернемся к нашей задаче 194. Хорошо бы выстроить отрезки AT, BT и CT в виде ломаной, соединяющей две какие-то точки.

...Эврика! Повернем треугольник ABC вокруг одной из вершин на угол 60°. Во внешнюю сторону. Пусть это будет вершина B.

Стоп! А зачем «вертеть» весь треугольник? Давайте повернем вокруг B треугольник BTC, как показано на рис. 44. Пусть точки C и T перейдут в точки C_1 и T_1 соответственно. Треугольники BTT_1 и BCC_1 являются правильными. Таким образом, сумма $AT + BT + CT$ равна длине ломаной ATT_1C_1 и будет наименьшей, когда эта ломаная превратится в отрезок прямой. (Не забудем, что точка C_1 никак не связана с точкой T.)

Отсюда сразу получаем, что угол BTA должен быть равен 120°.

Рассматривая такие же повороты вокруг других вершин, получим, что все углы BTA, ATC и CTB должны быть равны 120°. (Мы рассматривали треугольник с углами меньше 120°.) Это и есть наша точка Торричелли.

Приведенное рассуждение дает нам возможность решить несколько непростых и красивых геометрических задач.

196. На сторонах треугольника ABC во внешнюю сторону построены правильные треугольники ABC_1, BCA_1 и CAB_1. Докажите, что отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.

197. Жители трех деревень решили вырыть общий колодец. Жители самой большой деревни предложили вырыть колодец в такой точке, чтобы общий путь всех жителей всех деревень был наименьшим. Их предложение было принято. Где следует вырыть колодец, если число жителей в деревнях соответственно равно 30, 40 и 70?

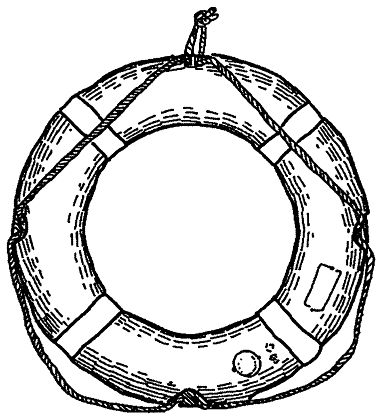
198. Имеется угол величиной 17°. Представим, что стороны угла — это бортики бильярда. Внутри угла находится бильярдный шар. Мы направляем этот шар в некоторую точку на одном из бортиков. Шар, ударившись несколько раз, вылетает из угла. Какое наибольшее число раз этот шар может удариться о бортики?

199. Приведенное в этой главе доказательство теоремы Пифагора поможет вам решить следующую задачу. На гипотенузе прямоугольного треугольника с катетами a и b во внешнюю сторону построен квадрат. Найдите расстояние от вершины прямого угла до центра этого квадрата.

200. Гусеница сидит на дне коробки без крышки, стоящей на полу. Дно коробки представляет квадрат со стороной 60 см, а высота ее 5 см. Гусеница ползет со скоростью 50 см/мин (как по полу, так и по стене). Изобразите все точки, до которых гусеница может добраться за 1 минуту, но не быстрее.

Глава 13

ГЛАВА ПОСЛЕДНЯЯ И САМАЯ СЧАСТЛИВАЯ



Эта последняя глава является также первой и единственной главой без математики. Впрочем, это только на поверхностный взгляд. Вы уже прекрасно понимаете, что совсем без математики обойтись невозможно. Ни в природе, ни тем более в обществе людей.

Надеюсь, вы помните, что Гаврила Терентьевич приезжал в Москву не только для подготовки летнего математического лагеря в Квашине. Возникли еще две проблемы, которые дедушка хотел решить. Или, по крайней мере, найти в столице помощь для решения этих проблем. К сожалению, найти помощь он не смог. Он понял, что рассчитывать квашинцам следует лишь на самих себя. Конечно, дедушка не был согласен с циничным высказыванием: «Спасение утопающих — дело рук самих утопающих». Он верил в то, что добрых людей большинство. Дедушка мог бы обратиться за помощью к своим бывшим ученикам. Но это было бы неправильно. «Эх! Хорошо бы создать

Общероссийскую партию учителей», — думал дедушка. Ведь учителя — огромная сила. Дедушка понимал, что есть профсоюз учителей. Но *это — не то*. Партия — вот что нужно. И принимать в нее можно не только учителей, но и всех желающих и согласных с тем, что учитель — самый нужный человек. Но партия — так, мечта. А проблему решать надо быстро, сегодня.

Что же делать? Среди квашинцев не было суперменов, владеющих приемами восточных единоборств. Это были простые мирные жители, среди которых было много пожилых. Что они могли сделать против бандитов, вооруженных пистолетами?

И дедушка стал размышлять. И вскоре у него *появилась* идея, которая еще в Москве *проявилась* в странной просьбе — прислать в Квашино десять мобильных телефонов. Своей идеей дедушка поделился с Моцартом Савельевичем, когда вернулся домой. Тот ужасно обрадовался. Он сам пришел к похожей идее, но с *другого конца*, изучая древние летописи, в которых рассказывалось об истории Среднерусской области.

Составив план (серьезную работу надо делать по плану) и обсудив детали (неправильная деталь может разрушить самую прочную конструкцию), они сразу приступили к работе.

Эта трудная и каждодневная работа продолжалась в течение всего лета. Никто, кроме дедушки и Моцарта, не был посвящен в суть дела. Конечно, ребята замечали некоторые странности в поведении дедушки, но не придавали этому особого значения.

А дедушка, можно сказать, жил настоящей *двойной* жизнью. А одно время даже *тройной* (помните историю похищения «Черного квадрата»?).

Впрочем, если посмотреть вокруг и даже на самого себя, то можно заметить многих, живущих тройной жизнью. Возьмем обычного человека школьного возраста. Он часто бывает разным в школе, дома и на улице (только что заметил: *улица — у лица*, интересно, почему так?). И нередко тот, кто первый в школе, далеко не первый на улице. Может, это просто потому, что в школе и на улице разные направления отсчета.

Результат совместной — дедушки и Моцарта Савельевича — работы, возможно, еще далеко не окончательный, стал известен лишь в конце августа, когда дети из математического лагеря вернулись домой.

Все главные события произошли буквально в течение недели. Так, кстати, часто бывает в жизни. Ты ждешь трамвай. Его все нет и нет. Как вдруг появляется один, за ним виден другой, а дальше и третий. Или ты готовишь уроки, ходишь в школу, а тебя всё не вызывают и не вызывают. И вдруг в один прекрасный день... прекрасный, конечно, если ты и в этот день все выучил. А если нет? Но в нашем случае такое сравнение не совсем подходит. Дедушка и Моцарт Савельевич были наготове постоянно. Они только хотели дождаться отъезда ребят из лагеря. Сначала разобрались с бандитами, которые требовали деньги с директора кондитерской фабрики.

Да, кстати, в последнее время фабрика стала не только кондитерской. В окрестностях Квашина открыли источник *целебной*, можно даже сказать *живой, воды*. На фабрике начали эту воду разливать по бутылкам, на которых была наклейка с надписью «Квашинская живая вода», и продавать. (Конечно, для жителей Квашина вода была бесплатной.) Изготавливала фабрика и другие истинно русские напитки — от натурального клюквенного морса и до настоящих *кислых щей*. Спрос на эти напитки был огромен, и фабрика процветала.

Дедушка попросил директора, чтобы тот как можно дольше оттягивал окончательный разговор с бандитами, но при этом вел себя с ними сдержанно. Не стоит их злить. Пусть, наоборот, считают, что все идет так, как им нужно, и что директор фабрики вскоре заплатит им *дань.* Была определена последняя дата выплаты. Где-то в середине августа. Директор фабрики предупредил дедушку.

Конечно, платить дань бандитам директор фабрики не собирался. Даже если бы у него и были деньги. По *правде* же *говоря* (всегда ли, говоря «по правде говоря», мы говорим правду?), на фабрике никаких денег, кроме необходимых для ее нормальной работы, — на зарплату рабочим, на закупку сырья, на оплату электричества и прочего, — не было. Вся прибыль ушла на математический лагерь. Для детей, вернее для их родителей, лагерь был бесплатным. Так что помочь директору фабрики было просто необходимо.

И вот ровно в назначенный день за несколько часов до назначенного бандитами времени Гаврила Терентьевич вошел в кабинет директора кондитерской фабрики.

Они поздоровались. Дедушка напомнил план, разработанный заранее. Собственно говоря, никакого особенного плана и не было. Директор разговаривает с бандитами, а дедушка вступает в разговор в *нужный* момент. В ожидании *непрошеных гостей* каждый занялся своим делом. Директор просматривал бумаги, а дедушка стал размышлять над одной проблемой. Он знал эту проблему и мечтал поработать над ней, но все никак не *доходили руки*, а точнее голова.

201. На плоскости любой треугольник можно разрезать на четыре треугольника такой же формы, но в 2 раза меньшего размера.

Мы знаем и другие фигуры на плоскости, обладающие таким же свойством (см. задачу 10). Некоторые треугольники можно разрезать на другое число, отличное от четырех, равных треугольников такой же формы, что и исходный (см., например, задачу 180). А как обстоят дела в пространстве? Рассмотрим простейший многогранник – треугольную пирамиду. Известны четыре вида треугольных пирамид, которые можно разрезать на восемь пирамид такой же формы, но в 2 раза меньшего размера. Три из них можно получить из куба следующим образом. Пусть *A*, *B*, *C* и *D* – четыре вершины куба (рис. 45, *а*). Пирамида *ABCD* и есть одна из таких пирамид. Второй вид – это пирамида *OABC* (*O* – центр куба). Третий вид – эта пирамида *OPAB* (*P* – середина *AC*). Пирамида четвертого вида может быть получена следующим образом. Расположим в пространстве два равных отрезка *AB* и *CD* так, чтобы они были перпендикулярны друг другу, а отрезок, соединяющий их середины, был бы в 2 раза меньше и перпендикулярен им (рис. 45, *б*). Концы этих отрезков являются вершинами пирамиды, которую также можно разрезать на восемь пирамид такого же вида и в 2 раза меньших. Для каждой из четырех описанных здесь пирамид укажите, как можно ее разрезать на восемь равных и в 2 раза меньших пирамид.

То, что других видов пирамид, которые можно разрезать на меньшие такой же формы, не существует, математики не умеют доказывать, равно как и найти еще какой-то новый вид таких пирамид. Пока не умеют.

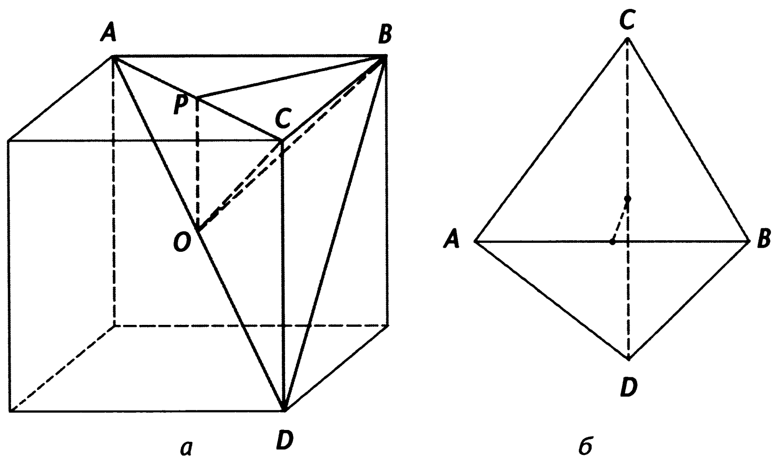


Рис. 45

Вдруг за окном раздался резкий скрип тормозов, затем дверь открылась и в нее не вошли, а именно вломились два человека. По форме они настолько *походили* на квадраты и кубы, что могли бы заменять наглядные пособия на уроках геометрии.

— Ну что, деньги приготовил? — с таким вопросом они сразу обратились к директору.

Но ответил им не директор, а дедушка. Возможно, он решил, что нужный момент уже настал, или же просто решил его не ждать.

— Прежде чем войти, надо стучаться. А когда вошли, то сначала надо поздороваться.

Почти невозможно описать впечатление, какое произвели эти простые слова на вошедших... (Многоточие означает, что автор не смог подобрать нужного слова.) Похоже, они просто не поняли смысла сказанного. Может, никогда в жизни ничего подобного они не слышали. Пару минут они стояли, выпучив глаза и открывая и закрывая рот.

— А это что за тип? — наконец выговорил один, ткнув пальцем в дедушку. — Тебе что, жить надоело?

— Кажется, нормального разговора у нас не получится, — сказал дедушка. — Но все же я считаю необходимым вас предупредить: вы должны немедленно покинуть эту комнату и никогда сюда более не возвращаться. А не то...

— А не то ты нас побьешь. Го-го-го! — загоготали бандиты. — Или даже застрелишь! Ха-ха-ха!

Дедушка очень не любил насилия. Но его вынуждали к этому. Что ж, приходится действовать. Дедушка подошел к окну и пошире его приоткрыл. Через несколько секунд у одного из бандитов зазвонил мобильный телефон. Но пока он доставал свой телефон, в окно влетели пчелы и без раздумий атаковали бандитов. Трудно придумать что-нибудь более ужасное, чем атака разгневанных пчел. Бандиты громко кричали, размахивали руками, но ничего не помогало.

Но тут дедушка сделал какой-то жест, и пчелы одна за другой стали вылетать в окно. Только несколько наиболее отчаянных продолжали носиться по комнате, чем-то напоминая маленькие военные самолеты. Но вскоре и они улетели.

На бандитов просто было *жалко смотреть*, хотя особенно жалко их не было. Сами виноваты.

— Ну что ж. На первый раз хватит! Впрочем, если вы еще не выучили урока, можно и повторить, — сказал дедушка.

На распухших лицах появился неподдельный испуг. Нет, не испуг, а самый настоящий ужас. С этим выражением ужаса грозная пара, поджав хвосты, выскочила за дверь и помчалась к своей машине. Неслись они не просто как *ошпаренные*, а именно как *ужаленные*. Вскоре взревел мотор, и машина на бешеной скорости помчалась по направлению к шоссе.

— Как бы они с перепугу беды на шоссе не наделали! — озабоченно проговорил дедушка. — Ну что ж! Будем надеяться, что эта проблема решена. Пусть временно.

(Может ли проблема быть решена временно? В математике — нет, но в жизни — бывает.)

Теперь самое время кое-что разъяснить читателю, хотя главное уже ясно. Идея использовать пчел в качестве оружия защиты возникла у дедушки во время его короткого пребывания в Москве. Как ни странно, подсказал эту идею внезапно зазвонивший сотовый телефон.

Сотовый, сотовый, почему сотовый? Соты! Пчелы! Так-так-так! Тут что-то есть.

В начале идея казалась совершенно фантастической. Но чем дольше дедушка думал, тем все больше и больше эта идея ему нравилась. А почему бы нет?

Дедушка вспомнил про своего друга Моцарта Савельевича, который в последнее время увлекся пчеловодством и рассказывал удивительные истории о коллективном разуме пчел. Как они защищают свой улей, как чувствуют злых людей, несущих разрушение, как любят хорошую, классическую музыку и как начинают злиться при звуках громкой дисгармоничной музыки.

Мысль о том, что пчел можно использовать для защиты от бандитов, возникла и у самого Моцарта Савельевича. Ему удалось разыскать древние летописи. Там рассказывалось, что в давние времена, когда Русь подвергалась набегам печенегов и платила дань Золотой Орде, люди, жившие на территории их родной Старорусской области, оставались свободными и никому никакой дани не платили. Их называли «лесной народ». Завоеватели и грабители со страхом приближались к лесам, где жил лесной народ. А леса эти были в самом деле *дремучими*. Лесной народ жил в полной *гармонии* с природой. Люди понимали язык зверей, птиц и даже насекомых. Но особая дружба возникла между лесным народом и пчелами. Пчелы давали людям мед, который был их основной пищей. Люди же ухаживали за пчелами, помогали им пережить суровые зимы. Именно пчелы и были главными защитниками лесного народа. Как только к лесам приближались враги, пчелы по первому зову вылетали на защиту. И самые грозные войска, вооруженные не только до зубов, но и выше, в панике бежали, бросая оружие, оставляя повозки, снаряжение и продовольствие. И после нескольких попыток завоеватели оставили лесной народ в покое. А грозная слава о страшных дремучих лесах и о жителях этих лесов разнеслась по всему свету.

Вот что вычитал Моцарт Савельевич в старинных летописях.

Итак, дедушка Гаврила Терентьевич и его друг Моцарт Савельевич разработали детальный план и принялись его реализовывать. Они разведали, какую музыку использовали бандиты на своих мобильных телефонах для звонков. Самые популярные мелодии они поставили на те десять телефонов, которые прислали из Москвы. Затем они приучили пчел атаковать те места, откуда раздавался звонок с определенной мелодией. Например, прятали телефон в огородное пугало. Изготовили для этих целей несколько чучел. Придумали и другие методы для обучения (именно обучения, а не *дрессировки*) и тренировки пчел.

А теперь расскажем, как дедушка и Моцарт Савельевич решили вторую проблему. О ней также упоминалось в первой главе, но, возможно, вы уже забыли. Тогда напомню. Недалеко от Квашина находилось прекрасное озеро, в котором водились раки, пресноводные мидии, а вдоль берегов росла удивительная желтая лилия. Говорили, что в мире есть только два озера, где можно было увидеть такую лилию. Второе было в Швейцарии и охранялось государством. Окружали озеро прекрасные леса, в которых было много всяких ягод и грибов и жили многочисленные птицы и звери.

Так вот, объявился человек, который утверждал, что все эти земли вокруг озера стали его *частной собственностью*. Он их купил. Но было непонятно, у кого он их купил, где и за сколько. Этот человек хотел поделить землю вокруг озера на участки, построить на них коттеджи и продать богатым людям.

Похоже, этот ужасный план уже начали реализовывать. Было создано так называемое ЗАО (закрытое акционерное общество) под названием «Елки и палки». В Квашине появилась контора, где сидел управляющий этим акционерным обществом. Вот-вот могло начаться строительство. Поэтому действовать надо было быстро и решительно.

Дедушка с большим трудом смог добиться, чтобы управляющий его принял. Конечно, лучше было бы встретиться с самим хозяином, но тот в Квашине не появлялся.

Когда дедушка вошел в комнату, где сидел управляющий, он увидел вполне приличного на вид человека лет тридцати, то есть молодого, с точки зрения дедушки, хотя Федя и его друзья наверняка сочли бы этого человека старым. Впрочем, возраст — странная штука. Ведь самого дедушку Федя считал чуть ли не своим ровесником. Похоже, что человек, сидевший за столом, даже имел образование, то есть диплом об образовании. (На стене висел диплом об окончании юридического факультета Ступид университета (Stupid University).) Хотя, конечно, *иметь образование* и *быть образованным* — совсем не одно и то же.

Дедушка начал объяснять, в чем цель его визита. Однако разговор не получался. Несмотря на то что оба говорили по-русски, впечатление было такое, как будто разговаривают они на разных языках. Поэтому приведем лишь некоторые отрывки из этого разговора.

Управляющий:

— Уж не хотите ли вы сказать, что мы должны прекратить работы по строительству коттеджей вокруг озера?

Дедушка:

— Я не только хочу это сказать, но я именно это и сказал.

Управляющий:

— Мы уже начали подготовительные работы. Потратили деньги. Если же вы оспариваете законность владения нашей компанией землями около Квашина, то подавайте в суд. Там разберемся. Будем решать проблему в рамках правового поля.

Дедушка:

— Ну что ж, давайте. Но если мы подаем в суд, то это будет означать, что ваша компания владеет землями и в самом деле незаконно. И это владение будет незаконным до того момента, когда решение суда вступит в законную силу. Поэтому даже если вы выиграете дело в суде, мы будем иметь право подать в очередной раз в суд по поводу ваших незаконных действий, предпринятых до решения суда.

Тут управляющий не выдерживает, и выясняется, что, по сути, он такой же бандит, как и те двое, что требовали дань с директора фабрики. Или даже хуже, поскольку притворяется культурным. Он закричал:

— Да плевал я на ваши законы! Тоже мне, нашлись юристы в Квашине.

— Ну что же, — сказал дедушка, — этого и следовало ожидать. Если вы признаете только силу, придется вам ее показать.

Думаю, что дальнейшие события читатель не только может себе представить, но и даже самостоятельно описать.

Дедушка подходит к окну. Приоткрывает его. Раздается звонок мобильного телефона управляющего. В комнату влетают пчелы. И...

— А-а-а! Ой! Ой! Помогите! — такие истошные крики издает управляющий. Он бегает по комнате, в ужасе машет руками. А вокруг него стремительно носится эскадрилья пчел.

Дедушка дает сигнал, и пчелы с торжественным гулом удаляются.

Управляющий, тихо подвывая, остался стоять посередине комнаты, держась распухшими руками за распухшее лицо.

— Я понимаю, что вы сейчас не способны говорить и понимать. Вам требуется срочная медицинская помощь.

Сказав это, дедушка открыл дверь, и в комнату вошел врач. И пока врач обрабатывал ужаленные места, дедушка произнес небольшую речь.

— Как видите, мы не такие беззащитные. У нас есть возможность не позволить вашей фирме вести строительство на наших землях. А кроме того, кто согласится отдыхать там, где кругом летают разгневанные пчелы и вы не только не можете выйти на улицу, но даже и открыть окна? Что же касается юридических проблем, то мы готовы обсудить их. Но не с вами, а с вашим хозяином. Не думаю, что он так уж сильно потратился, приобретая земли. Насколько мне известно, куплены они за бесценок и незаконно. А вот если он попробует по-настоящему начать строительство, то потери будут неизмеримо бóльшими. И не только финансовые. Я надеюсь, что вы сможете все популярно изложить своему хозяину. Вы достаточно образованны.

Дедушка с усмешкой посмотрел на диплом, висевший на стене.

Итак, еще одно важное дело было сделано.

...Вечером того же дня дедушка и Моцарт Савельевич устроили себе небольшой праздник. Они пили чай с конфетами, обсуждали итоги проделанной работы и обдумывали планы на будущее. Было понятно, что борьба еще не окончена. Надо работать дальше, учить пчел отличать самостоятельно злого человека от доброго, преступника от его жертвы. Тут дедушка обратил внимание на то, что среди всех людей, бывших в лагере, пчелы жалили лишь одного и притом несколько раз. И это был именно тот, кто похитил «Черный квадрат». И похоже, что один раз он был ужален именно в момент похищения.

С другой стороны, пчелы сами нуждаются в защите. «Надо совершенствовать наше *биологическое оружие*», — размышлял дедушка. В этот момент его внимание привлекла оса, сделавшая несколько кругов по комнате.

Вот, пожалуй, и все.

Да! Чуть не забыл. Ведь автор обещал узнать и объяснить, что означает *сотовый* телефон. И почему *сотовый*. На самом деле, выражение «сотовый телефон» — неправильное. Телефон мобильный. А вот связь — сотовая. Дело в том, что территория, на которой действует сотовая связь, разделена на отдельные, примыкающие друг к другу участки. Вроде сот. И связь между двумя людьми, говорящими с друг другом, осуществляется не напрямую, а через соты, от одного участка к другому. И для того, чтобы эту связь организовать, приходится решать очень трудные и интересные задачи. *Математические.*

РЕШЕНИЯ

1. Здесь автор признается, что не знает, как определить некоторые из перечисленных в задании понятий без толкового словаря (хотя и не считает себя *бестолковым*). А со словарем найти эти определения сможет и читатель.

2. Человек насчитает $\frac{2}{3} \cdot 132 = 88$ ступенек.

3. Эту задачу удобно решать с помощью уравнений. Пусть x — количество ступенек у эскалатора. Тогда $(x - 72) : 72$ есть отношение скорости, с которой движется эскалатор, к скорости, с которой Петя спускается. Точно так же $(x - 48) : 48$ есть отношение скорости эскалатора к скорости подъема. Но вторая дробь по условию в 2 раза больше первой. Получаем уравнение $(x - 72) : 36 = (x - 48) : 48$. Откуда найдем $x = 144$.

4. Понятно, что на конечной остановке трамвай стоит меньше 11 минут. Конечных остановок две. Значит, трамвай окажется в том же месте маршрута (с учетом направления движения) через время, которое больше 120 минут, но меньше 142 минут. Следовательно, количество трамваев не может быть меньше 11 и больше 12. (Если n — число трамваев, обслуживающих маршрут, то должно быть $120 < 11n < 142$).

5. Первое равенство означает (в десятичной системе) $(10у + з) \times (10е + л) = (10л + е)(10з + у)$. После очевидных преобразований получаем $у \cdot е = з \cdot л$. Но легко проверить, что произведение двух однозначных чисел равно произведению двух других однозначных чисел (все числа различны) в трех случаях (не учитывая порядок множителей): $1 \cdot 6 = 2 \cdot 3$; $1 \cdot 8 = 2 \cdot 4$; $2 \cdot 6 = 3 \cdot 4$. Из этих равенств можно получить все решения задачи. Эти решения соответствуют следующим 6 равенствам: $12 \cdot 63 = 36 \cdot 21$; $13 \cdot 62 = 26 \cdot 31$; $12 \cdot 84 = 48 \cdot 21$; $14 \cdot 82 = 28 \cdot 41$; $23 \cdot 64 = 46 \cdot 32$; $24 \cdot 63 = 36 \cdot 42$. (Другие решения можно получить, переставляя левую и правую части равенств и меняя порядок множителей.)

Во второй задаче понятно, что буква *в* может равняться 2, 3 или 4. Ведь если *в* = 5 или больше, то *л* = 1. Теперь значения 5, 6 и 8 для *в* отпадают сразу. Далее убеждаемся, что *в* не может равняться 7 и 9. Перебирая оставшиеся значения *в* 2, 3 и 4 и для каждого из них возможные значения буквы *л*, найдем единственное решение задачи: $2178 \cdot 4 = 8712$. Все решения последней задачи (мот · бук = куб · том) получаются из трех равенств $682 \cdot 143 = 341 \cdot 286$; $268 \cdot 431 = 134 \cdot 862$ и $628 \cdot 413 = 314 \cdot 826$.

6. Катер удаляется от плота со своей собственной скоростью, то есть со скоростью, с которой он движется в стоячей воде. Ведь по отношению к берегу к его скорости в стоячей воде добавляется скорость течения, которая равна скорости плота. Точно так же катер приближается к плоту со своей собственной скоростью. Значит, удаляется от плота и приближается к нему катер с одинаковой скоростью. Отсюда получаем, что время, которое катер удалялся от плота после выхода из *А*, равно времени, в течение которого катер сближался с плотом. Следовательно, время на путь катера от *А* до *В* равно 1 часу.

7. Рассуждая как и в предыдущей задаче, получим, что катер возвращается в *А* через 1 час после встречи. Значит, на путь от *А* до *В* катеру требуется 1 час, а на обратный путь — 2 часа. То есть, возвращаясь, катер проходит за 1 час половину пути. Но от *А* до *В* за 1 час катер проходит сумму расстояний: расстояние, пройденное за счет своей скорости плюс расстояние за счет течения. На обратном пути за 1 час катер проходит путь, равный разности тех же расстояний. Следовательно, плот (течение) за 1 час преодолевает $\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2})=\frac{1}{4}$ пути. А на весь путь ему потребуется 4 часа.

8. Представим себе, что *А* и *В* — противоположные точки на кольцевом маршруте. А наши тела движутся по этому маршруту в одном направлении. За указанное в условии время первое тело сделает 201 круг, а второе — 101 круг. То есть первое тело сделает на 100 кругов больше второго. Первый обгон будет, когда первое тело пройдет на $\frac{1}{2}$ круга больше второго. Второй обгон, когда оно пройдет на $1\frac{1}{2}$ круга больше второго. Сотый обгон — когда оно пройдет на $99\frac{1}{2}$ круга больше второго. А всего первое тело обгонит второе 100 раз.

9. См. рис. 46, *а, б*.

10. См. рис. 47.

11. Поскольку $36 = 17 + 11 + 8$, перечисленные города расположены на одной прямой. Расстояние между Звонгородом и Пузырем равно $17 + 8 = 25$ км.

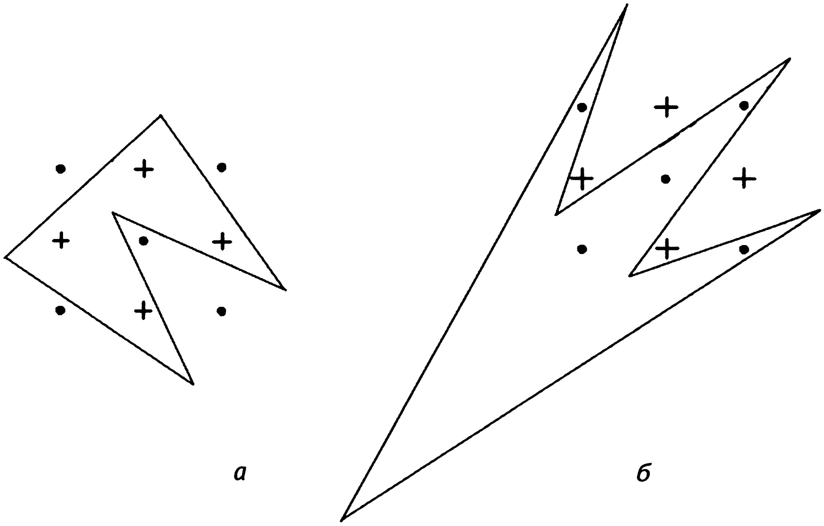


Рис. 46

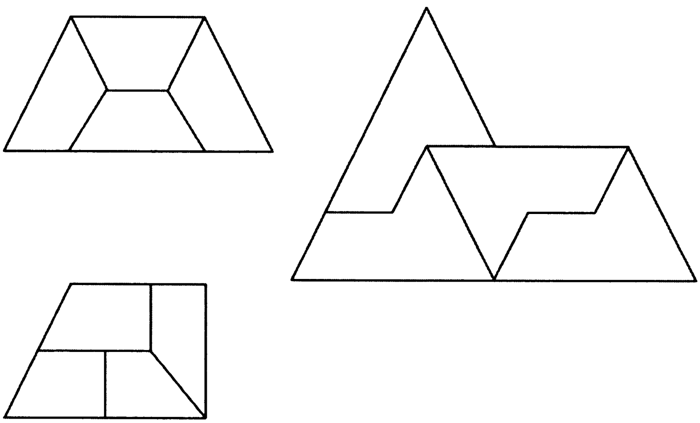


Рис. 47

12. Предположение состоит в том, что к остановке подходят автобусы двух маршрутов. И у каждого свой интервал движения. (Полезно сделать картинку: нарисовать прямую и на ней отметить интервалы движения.) Пусть первым подошел автобус *А*. Тогда через 2 минуты подошел автобус *Б*. Следующим — через 3 минуты — вновь должен быть *А*. В противном случае автобусы *Б* должны были бы следовать с интервалом в 3 минуты, что неверно. Итак, интервал движения автобусов *А* составляет 5 минут. Значит, для автобусов *Б* интервал — 7 минут. Следующий интервал (см. условие) должен равняться 4 минутам.

13. См. рис. 48.

14. Например, $x = 1$, $y = 4$, $z = 7$. (В обычном году 365 дней и 12 месяцев, из которых в одном — 28 дней, в четырех — 30 дней и в семи — 31 день.)

15. Например, $1 - (2 + 3 - (4 + 5) - (6 + 7) - (8 + 9) - 10) =$ $= 45$.

16. Мизинец будет 1-м, 9-м, 17-м, ..., 993-м (начиная с 1 прибавляем по 8). Теперь легко получаем, что Маша окончит счет на безымянном пальце.

17. $3 \cdot 3,(3) = 10$.

18. $101 - 10^2 = 1$.

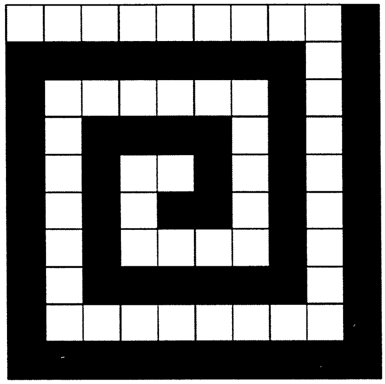


Рис. 48

19. Профессор — женщина, а в шахматы играли ее муж и брат.

20. Повернем квадрат сначала на 180° вокруг диагонали AC. (Это два поворота на 90°.) А затем повернем на 180° вокруг прямой AD (правда вместо D будет стоять вершина B).

21. Нарисуем путь автобуса и отметим на нем упомянутые населенные пункты (рис. 49). Из картинки «видно», что сумма расстояний от Москвы до деревни Моховая и от Звонких Бубенцов до Квашина в 2 раза меньше расстояния между деревней Моховая и Звонкими Бубенцами, то есть 100 км. Значит, расстояние до Квашина от Москвы равно 300 км.

22. Понятно, что при нормальном голосовании выборы пройдут в два тура и во втором победить должен Бодров. Но умудренные опытом старики могут поступить следующим образом. В первом туре они отдадут молодежи 31 голос. В результате Аксакалов и Веснушкин получат по 67 голосов, а Бодров останется со своими 66 голосами. А во втором туре Аксакалов одолеет своего молодого и более удобного для него соперника.

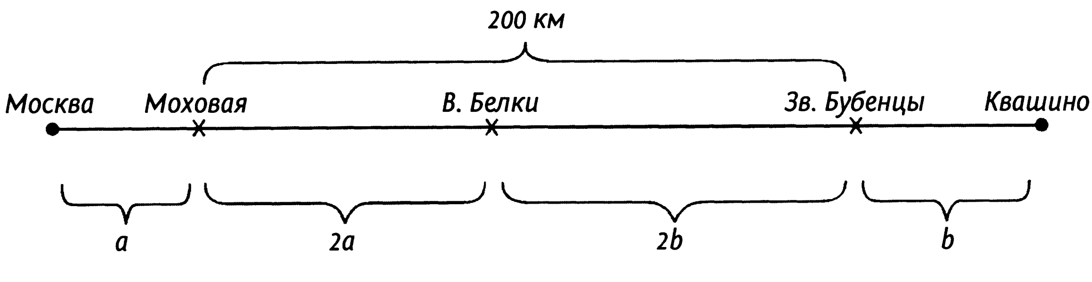


Рис. 49

23. Понятно, что если дуэль начинает гусар *В*, то самое худшее, что он может сделать, это поразить кого-нибудь из двух других. В этом случае неразумный гусар *В* почти наверняка погибнет. Значит, ему выгодно промахнуться. Но забавно, что если стрелять начинает *А* или *Б*, то и им выгоднее всего промахнуться. Если, конечно, они достаточно разумны и не желают погибнуть. Так что наши гусары, постреляв некоторое время в воздух, должны разойтись с миром.

24. Скорей всего, из списка будет исключен все тот же *X*. В самом деле. Голосуют 50 человек. Как мы знаем, 10 человек проголосуют против *X*. Остается 40 человек на 10 делегатов. Все делегаты примерно одинаковы. В среднем против каждого будет по 4 человека. Вот и получается, что самый лучший оказывается и самым худшим. Голосование «за» и «против» — разные вещи.

25. Пусть ширина флага равна x. Тогда его площадь $2x$. Площадь средней части (это квадрат) — x^2. Площадь оставшейся части равна $2x - x^2$. Это выражение можно представить в виде $1 - (1 - x)^2$. Самое большее значение, равное 1, это выражение примет при $x = 1$. Ведь квадрат любого числа неотрицателен.

26. Сторона правильного шестиугольника, вписанного в данную окружность, равна радиусу окружности. Построив правильный шестиугольник, вписанный в окружность, легко построим и правильный треугольник, вписанный в нее же. Для построения правильного вписанного четырехугольника (квадрата) достаточно провести два перпендикулярных диаметра.

27. Рассмотрим рис. 50, *а*. Чтобы доказать, что *AB* есть сторона правильного вписанного пятиугольника, достаточно доказать, что *CB* и *AC* — стороны правильного вписанного десятиугольника. Пусть радиус окружности равен 1. Тогда по теореме Пифагора (см. главу 12) $CP = \frac{\sqrt{5}}{2}$ ($OC = 1$, $OP = \frac{1}{2}$). Получаем, что $BC = CM = CP - PM = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$. Итак, нам остается доказать, что сторона правильного десятиугольника, вписанного в единичную окружность, равна $\frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$.

Пусть *KE* — сторона правильного десятиугольника, вписанного в единичную окружность с центром в точке *O* (рис. 50, *б*). *OKE* — равнобедренный треугольник, в котором угол при вершине *O* равен 36°, а углы при основании *KE* равны 72°. Проведем биссектрису *KL*. Вычисляя углы, получаем, что треугольники *OLK* и *LKE* равнобедренные ($OL = LK = KE$). При этом углы в треугольнике KLE такие же, как и в исходном треугольнике OKE. То есть эти треугольники имеют одинаковую форму. (Такие треугольники называют *подобными*). Отношения соответствующих сторон у них равны. Если положить $KE = x$, то $LE = 1 - x$. Получаем $\frac{LE}{KE} = \frac{KE}{OK}$ или $\frac{1-x}{x} = \frac{x}{1}$. Получаем квадратное уравнение $x^2 + x - 1 = 0$. Из этого уравнения находим $x = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$, что и требовалось.

28. Вася поменял выделенные цифры:

$$\begin{array}{r} 785643 \\ +\,2\mathbf{1}3579 \\ \hline 9992\mathbf{2}2. \end{array}$$

29. а) Вторая цифра второго сомножителя больше 8. (Иначе в произведении будет двузначное число.) Значит, второй сомножитель — 89. Первый множитель может быть равен только 12. Ни больше, ни меньше.

б) $66 \cdot 111$.

в) Поскольку после умножения первого сомножителя на последнюю цифру второго сомножителя получается трехзначное число, начинающееся на 3, первая цифра первого сомножителя не больше 3. Но при умножении первого множителя на 3 получаем четырехзначное число. Значит, первая цифра не меньше 3. Итак, первая цифра первого множителя равна 3. Тогда последняя цифра второго множителя — 1. Первая цифра второго сомножителя может быть только 9. Итак, найден второй множитель: 931. Теперь нетрудно найти и первый множитель: 377.

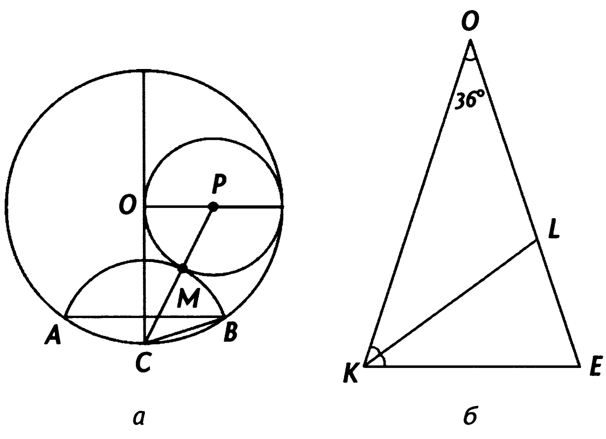


Рис. 50

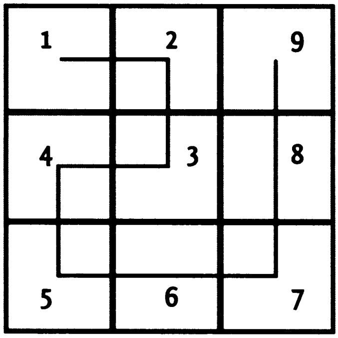


Рис. 51

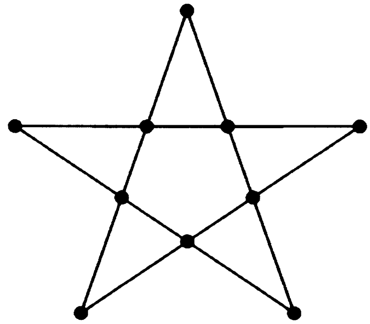


Рис. 52

г) Самое большое число, которое можно получить при умножении двух двузначных чисел, это 99 · 99 = 9801. Самое большее, что мы можем прибавить, — это 199. Получаем 99 · 99 + 199 = = 10 000. Это и есть ответ. В других случаях мы не сможем получить пятизначное число в результате.

30. Первая цифра второго множителя не 1. Самое меньшее — это 3. Но тогда первая цифра первого числа не может быть 4 или больше. Итак, первая цифра первого числа — 2, а первая цифра второго — 3. Теперь находим, что

$$\begin{array}{r} 2\text{чн}\\ \times\quad 3\underline{\textbf{н}}\\ \hline \underline{\textbf{ч}}\text{нчн}\\ \textbf{ч}\text{нн}\\ \hline \text{ннннн}. \end{array}$$

Здесь непременно **ч** = 8, а $\underline{\textbf{ч}}$ = 2. (Иначе их сумма не более 8 и произведение не будет пятизначным). Далее находим, что $\underline{\textbf{н}}$ = 9. И т. д. Окончательно получаем

$$\begin{array}{r} 285\\ \times\quad 39\\ \hline 2565\\ 855\\ \hline 11115. \end{array}$$

31. См. рис. 51.

32. См. рис. 52.

33. За 1 минуту минутная стрелка проходит $\frac{1}{60}$ круга или $\frac{360^\circ}{60} = 6^\circ$. Часовая стрелка за 1 час проходит $\frac{360^\circ}{12} = 30^\circ$, а за 1 минуту —

$0{,}5^\circ$. В 7 часов минутная стрелка указывает на 12, а часовая — на 7. Минутной стрелке, чтобы совпасть с часовой, надо повернуться на угол $180^\circ + 30^\circ = 210^\circ$. За 38 минут минутная стрелка пройдет $6^\circ \cdot 38 = 228^\circ$. Часовая за это время пройдет 19°. Угол между ними равен $210^\circ + 19^\circ - 228^\circ = 1^\circ$.

34. Пусть автомобиль проехал x км. Тогда суммарный пробег его колес будет $4x$, что не должно превосходить $2 \cdot 45\,000 + 3 \times 55\,000 = 255\,000$ км. Значит, автомобиль не может проехать более 63 750 км. Остается показать, как это можно сделать. Можно поступить следующим образом. Занумеруем шины: № 1 и № 2 дадим шинам фирмы «Бриджстоун». Остальные шины имеют номера 3, 4 и 5. Колеса также занумеруем от 1 до 4. Каждая шина с номерами от 1 до 4 находится или на месте с тем же номером, или в запасе. Шина № 5 по очереди заменяет остальные шины. Сначала она проезжает 18 750 км на месте № 1, затем ее заменяет шина № 1. Затем шина № 5 переходит на место № 2 и проезжает также 18 750 км. Далее последовательно шина № 5 проезжает по 8750 км на местах № 3 и № 4.

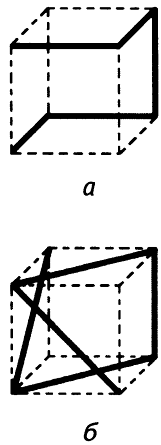


Рис. 53

35. Предположим, что все три бегуна стартовали вместе. Когда бегун A пробежит 1500 м, бегун B пробежит 1400 м, то есть $\frac{14}{15}$ дистанции. Значит, бегун B отстанет от бегуна $Б$ на расстояние $\frac{14}{15} \cdot 75$ м $= 70$ м, а от бегуна A он отстанет на 170 м.

36. $2 \cdot (3 \cdot 2 + 3 \cdot 4 \cdot (3 + 4)) \cdot 5 \cdot 4 = 3600$.

37. См. рис. 53.

38. Последовательность действий понятна из рис. 54.

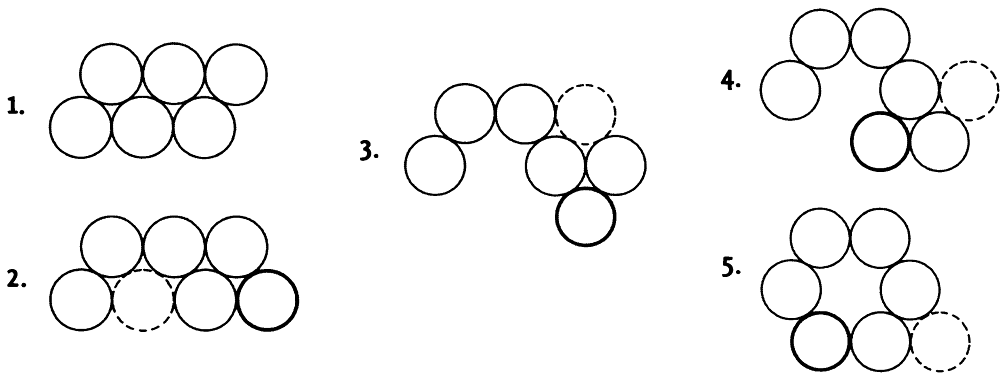


Рис. 54

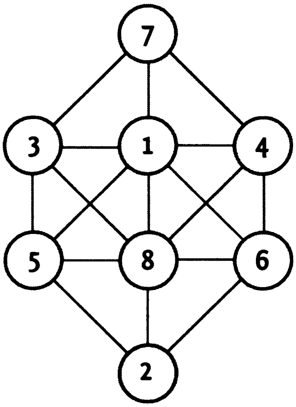


Рис. 55

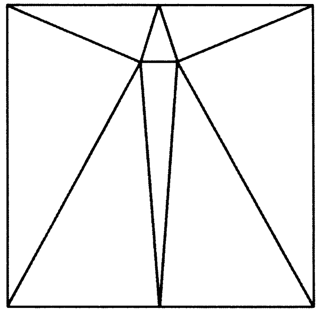


Рис. 56

39. Предположим, что одна группа альпинистов отправилась на вершину, а другая одновременно начала спуск. Понятно, что они непременно встретятся. Из этого следует утверждение задачи.

40. См. рис. 55. В двух средних кругах могут располагаться лишь 1 и 8. Дело в том, что каждый из этих кругов соединен со всеми остальными кругами, кроме одного. Там и должно находиться соседнее число. Это возможно, если соседнее число единственное.

41. Предположим, что Факельников подавал вторым. Значит, он сделал 4 подачи. Пусть он выиграл x своих подач и y чужих. По условию $x + y = 6$. С другой стороны в 5 играх побеждал тот, кто не подавал. Значит, $4 - x + y = 5$, $y = x + 1$. Подставляя в первое равенство, получаем $2x = 5$. Это невозможно. Если же предположить, что Факельников подавал первым, то получаем, что он выиграл 3 своих подачи и 3 чужих. Такой вариант возможен.

42. Задача имеет решение, если речь идет о сложении в римской системе счисления: DXLI + LXV = DCVI (541 + 65 = 606).

43. См. рис. 56.

44. Существует рассуждение, показывающее, что нельзя обойтись меньше, чем шестью распилами. Вот оно. Рассмотрим центральный кубик. У него 6 граней. Каждой грани соответствует один распил. Следовательно, число распилов не может быть меньше 6. Нетрудно распилить рассматриваемый куб на 27 единичных шестью распилами. Но указанное рассуждение справедливо, если мы не имеем права прикладывать друг к другу уже отпиленные куски. Если это разрешено, то достаточно двух распилов. Сначала распиливаем куб на две части. Потом вновь прикладываем их друг к другу, составляя куб, и начинаем пилить в другом направлении. И как только появляются отпиленные части, приставляем их снизу, продолжая пилить. При этом отпиленные части должны появляться еще до окончания второго распила. Легко организовать все таким образом, что после второго распила останутся одни лишь единичные кубики.

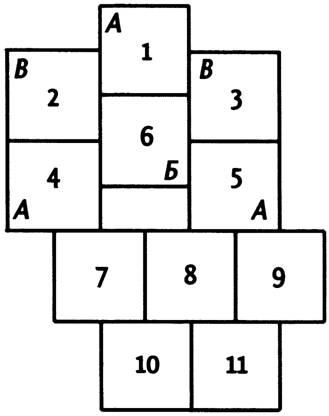


Рис. 57

45. Поджигаем один шнур с одного конца, а второй одновременно с ним поджигаем с двух концов (предварительно второй шнур сложим вдвое). Как только второй шнур сгорит (это произойдет через 30 секунд), поджигаем второй конец первого шнура. Через 15 секунд после этого первый шнур догорит.

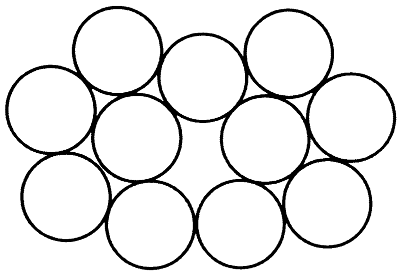


Рис. 58

46. Представим себе, что нам надо имеющееся золото поровну разделить между 7 людьми.

Это сделать легко. Надо каждому человеку дать по $\frac{1}{7}$ от каждого слитка. Теперь два человека, объединившись, образуют первый слиток в 2 кг, а пятеро оставшихся — второй в 5 кг. Получается, что первый слиток надо разделить на части в $\frac{2}{7} \cdot 3 = \frac{6}{7}$ кг и $\frac{15}{7}$ кг.

А второй — соответственно на части $\frac{8}{7}$ кг и $\frac{20}{7}$ кг.

47. а) См. рис. 57. Предположим, что мы смогли окрасить квадраты в три цвета. Пусть квадраты 1 и 6 окрашены в цвета *А* и *Б*. Тогда квадраты 2 и 3 должны иметь цвет *В*. Далее получаем, что квадраты 4 и 5 окрашены в цвет *А*. Значит, квадраты 7, 8 и 9 окрашены в два цвета: *Б* и *В*. И теперь мы не можем нужным образом окрасить квадраты 10 и 11.

б) См. рис 58. Нетрудно проверить, что в три цвета так, чтобы соседние были разного цвета, так расположенные круги нельзя раскрасить.

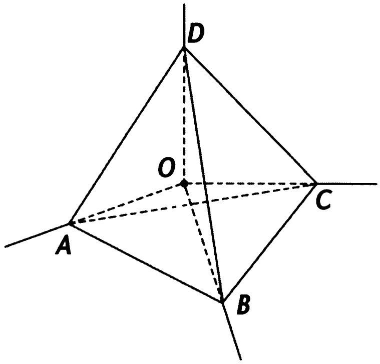


Рис. 59

48. Это возможно. Рассмотрим треугольную пирамиду $ABCD$ (рис. 59). Пусть наш астероид находится внутри этой пирамиды в точке O. Соединим эту точку с вершинами пирамиды. Рассмотрим лучи OA, OB и OC. Можно построить шар, не содержащий точки O и пересекающий лучи OA, OB и OC. Этот шар целиком закрывает грань ABC. Затем также построим шар, закрывающий другую грань. При этом нетрудно это сделать так, чтобы шары не пересекались. Третьим шаром закроем третью грань, а четвертым — четвертую.

49. Чтобы выяснить, на сколько процентов один вид продукта дешевле другого, надо сравнивать стоимость одинаковых количеств газировки. 6 бутылок старого типа вмещают столько же, сколько и 5 бутылок нового. А поскольку каждая бутылка и старого и нового типа стоят одинаково, получаем, что цена уменьшилась на $\frac{1}{6}$, или $(\frac{100}{6})\,\% \approx 16{,}7\,\%$.

50. Нам надо выяснить, сколько процентов от 125 составляет 100. Получаем (по определению) $\frac{100}{125} \cdot 100\,\% = 80\,\%$.

51. Уменьшение на 10 % числа соответствует умножению на $1 - 0{,}1 = 0{,}9$, а увеличение на 10 % — это умножение на 1,1. В результате этих изменений получаем $0{,}9 \cdot 1{,}1 = 0{,}99$. Зарплата в обоих случаях уменьшилась на 1 %.

52. В первом магазине новая цена составляет 0,8 от старой, а во втором — $0{,}9 \cdot 0{,}9 = 0{,}81$ от старой цены. Во втором магазине обувь дороже на $\frac{1}{80} \cdot 100\,\% = 1{,}25\,\%$.

53. Задача решена в тексте.

54. Например, в 1-м и 2-м подъездах Колиного дома по 1 кошке, а собак вовсе нет. А в 3-м и 4-м — 1 кошка и 9 собак в каждом. А у Васи — наоборот. В первых двух подъездах по 9 кошек и 1 собаке, а в двух последних — по 1 собаке. Процент кошек по подъездам в Колином доме соответственно 100 %, 100 %, 10 %, 10 %. В Васином доме: 90 %, 90 %, 0 %, 0 %. Всего же в доме Коли 4 кошки из 22 животных, а в доме Васи 18 кошек из 22.

55. В 10 кг свежих грибов содержится 9,5 кг воды и 0,5 кг сухого вещества. Значит, в сухих грибах будет 0,5 кг сухого вещества и 0,1 кг воды. Влажность равна $\frac{1}{6} \cdot 100\,\% \approx 16{,}7\,\%$.

56. В 10 т свежего винограда по условию содержится 1 % (или 0,1 т) сухого вещества. Значит, после хранения в имеющемся на складе винограде будет 0,1 т сухого вещества. По условию 0,1 т составляет 2 %. Всего же винограда будет 5 т. Для многих людей этот ответ кажется удивительным.

57. Пусть в олимпиаде не участвовало x школьников. По условию x составляет от 2,8 до 3,2 % от числа всех учеников.

Следовательно, количество учеников в классе находится между $\frac{100}{3{,}2}x$ и $\frac{100}{2{,}8}x$. Но $\frac{100}{3{,}2} = 31{,}2...$, $\frac{100}{2{,}8} = 35$. Теперь «видно», что меньше 32 человек в классе быть не может. А 32 возможно ($x = 1$).

58. Разбирать математические ошибки, содержащиеся в выступлении этого господина, мы не будем. Здесь важно, что автор ничего не придумывал. Все эти примеры взяты, так сказать, из жизни — из газет и телевизора.

59. Какое бы четырехзначное число вы ни взяли, не позднее чем через 7 шагов вы получите число 6174. Это и есть постоянная Капрекара. Названо это число по имени индийского математика XX столетия, обнаружившего эту закономерность. А что будет для пятизначных чисел? Попробуйте выяснить это самостоятельно. Проведите эксперимент.

60. После того как первый человек из зала напишет свое шестизначное число, артист под каждой цифрой этого числа пишет цифру, дополняющую ее до 9. Так что сумма первых двух чисел равна 999 999. Такой же будет и сумма двух последних чисел. Значит, к третьему числу прибавили 1 999 998 = 2 000 000 – 2. Чтобы получить сумму, надо вычесть из третьего числа 2 и приписать спереди 2. Сделать это способен любой, даже не очень сильный в арифметике человек.

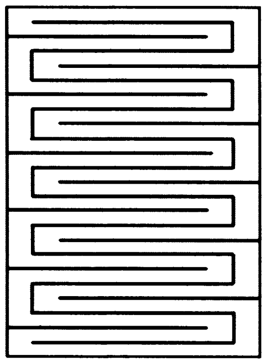


Рис. 60

61. а) Проделать такое отверстие можно различными способами. Один способ мы показывали в предыдущей книге. На рис. 60 показан иной способ.

б) Сложим полоску, а затем разогнем так, чтобы образовался угол примерно в 90°. Если теперь полоску бросить, то она наверняка упадет на ребро.

в) Сложите лист бумаги гармошкой и положите на стаканы.

62. Любой человек, умеющий складывать числа, легко сможет изготовить свою таблицу. Для этого надо взять пустую таблицу 5×5 (можно и с другим числом клеток) и сверху и слева — над каждым столбцом и у каждой строки — написать какие-то числа. После этого в клетки таблицы надо написать числа, равные суммам чисел, расположенных над этой клеткой и слева от нее. Тогда после выполнения описанных в условии действий всегда будет получаться сумма 10 чисел, написанных сверху и слева от таблицы. Если мы, например, сверху напишем числа 0, 7, 8, 4, 1, а слева 5, 20, 15, 31, 29, то получим таблицу, которую использовал фокусник. Сумма всех этих чисел равна 120.

63. Занумеруем стаканы 1, 2, 3, 4, **5**, **6**, **7**, **8**. Первые четыре – пустые, с пятого по восьмой – наполнены водой. Добиться нужной перестановки за четыре хода можно, например, следующим образом:

1) 1, –, –, 4, **5**, **6**, **7**, **8**, 2, 3;

2) 1, **5**, **6**, 4, –, –, **7**, **8**, 2, 3;

3) 1, **5**, **6**, 4, **8**, 2, **7**, –, –, 3;

4) –, –, **6**, 4, **8**, 2, **7**, 1, **5**, 3.

64. При перемножении двух чисел последняя цифра будет такой же, что и при перемножении последних цифр данных чисел. Нетрудно проверить, что при возведении в пятую степень любой цифры (однозначного числа) последняя цифра равна исходной цифре ($2^5 = 32$, $3^5 = 243$, $7^5 = ...7$ и т. д.). Поэтому, зная последнюю цифру пятой степени, мы сразу определяем и последнюю цифру исходного числа. Теперь надо запомнить, что все числа в пятой степени из второго десятка (от 10 до 19) не превосходят 3 000 000, пятые степени чисел из третьего десятка больше 3 000 000 и меньше, чем 24 000 000 и т. д. Короче говоря, фокуснику надо запомнить 9 чисел: 30, 240, 1000, 3000, 7000, 16 000, 30 000, 55 000, а затем мысленно приписать к каждому пять нулей. Если полученная зрителем пятая степень находится между первыми двумя числами из этих девяти (с добавленными пятью нулями), то искомое число – из второго десятка. Если она между вторым и третьим числом (с добавленными нулями), то число – из третьего десятка. И так далее. Число, данное в условии, оканчивается на 3 и расположено в первом интервале. Единственным «подозреваемым» числом, которое в пятой степени может дать указанное в условии число, это 23. Конечно, мы предполагаем, что тот, кто возводил 23 в пятую степень, сделал это правильно. На сей раз зритель ошибся, поскольку $23^5 = 6\,436\,343$. Никакое число, возведенное в пятую степень, не даст 6 435 343.

65. Сделаем на веревке в середине петлю (обозначим ее буквой *П*, рис. 61), как положено при завязывании узла. И просунем в нее

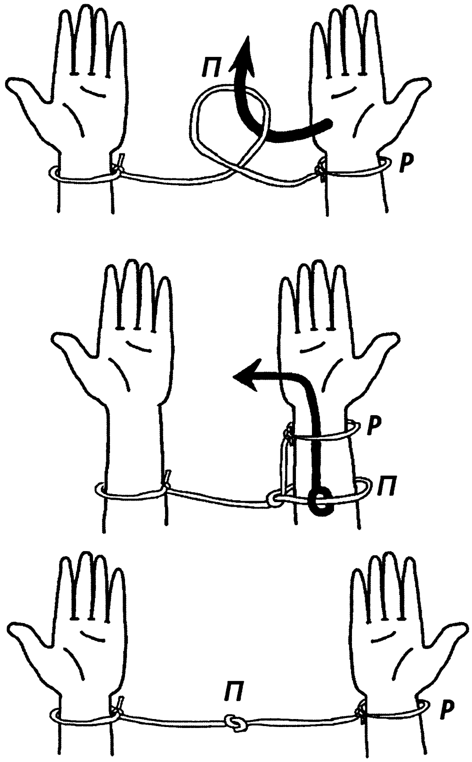


Рис. 61

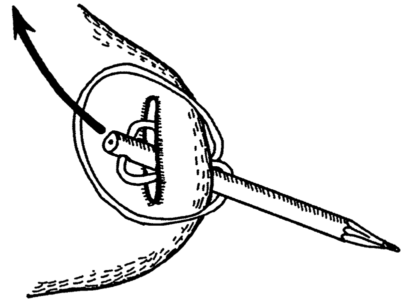


Рис. 62

соответствующую руку так, чтобы петля *П* оказалась дальше от кисти, чем петля *Р*, завязанная на руке. Затем снимем *П* с руки, подсовывая ее под *Р*.

66. Покажем, как можно привязать карандаш к пиджаку. Берем край пиджака рядом с пуговичной петлей и просовываем его достаточно далеко в петлю, привязанную к карандашу (рис. 62). Затем надеваем пуговичную петлю на карандаш и продеваем через нее карандаш. Для снятия карандаша надо все операции проделать в обратном порядке. По существу, мы не карандаш прикрепляем к пиджаку и затем снимаем его, а пиджак прикрепляем к карандашу и потом снимаем.

67. Объяснение игры в «ним» (алгоритм) дано в главе 7.

68. $5678_{(9)} = 4202$.

69. $7259 = 16\,133_{(8)}$. Можно сначала найти первую цифру. Поскольку 7259 больше, чем $8^4 = 4048$, но меньше, чем $2 \cdot 8^4$; в восьмеричной системе 7259 есть число пятизначное, и его первая цифра 1. Дальше получаем 7259 - 4048 = 3211. Теперь надо найти первую цифру (в восьмеричной системе) числа 3211. Это будет вторая цифра исходного числа. Но 3211 заключено между числами $6 \cdot 8^3 = 3072$ и $7 \cdot 8^3$. Значит, вторая цифра — 6. Снова вычитаем 3211 - 3072 = 139. Это число между 8^2 и $2 \cdot 8^2$. Следующая цифра — 1. И т. д. Другой способ решить задачу описан в тексте.

70. $76_{(10)} = 84_{(9)} = 114_{(8)}$; $76_{(9)} = 105_{(8)} = 69_{(10)}$; $76_{(8)} = 68_{(9)} = 62_{(10)}$.
$354_{(10)} = 433_{(9)} = 542_{(8)}$; $354_{(9)} = 444_{(8)} = 292_{(10)}$; $354_{(8)} = 282_{(9)} = 236_{(10)}$.
$2736_{(10)} = 3670_{(9)} = 5260_{(8)}$; $2736_{(9)} = 4012_{(8)} = 2058_{(10)}$; $2736_{(8)} = 2048_{(9)} = 1502_{(10)}$.
$1\,234\,567_{(10)} = 2\,281\,451_{(9)} = 4\,553\,207_{(8)}$; $1\,234\,567_{(9)} = 2\,441\,534_{(8)} = 672\,604_{(10)}$; $1\,234\,567_{(8)} = 571\,604_{(9)} = 342\,391_{(10)}$.

71. Таблицы умножения в указанных системах выглядят следующим образом (в двенадцатеричной системе добавлены две цифры: «Д» — 10 и «А» — 11.

1	2	3	4	5	6	7
2	4	6	10	12	14	16
3	6	11	14	17	22	25
4	10	14	20	24	30	34
5	12	17	24	31	36	43
6	14	22	30	36	44	52
7	16	25	34	43	52	61

1	2	3	4	5	6	7	8
2	4	6	8	11	13	15	17
3	6	10	13	16	20	23	26
4	8	13	17	22	26	31	35
5	11	16	22	27	33	38	44
6	13	20	26	33	40	46	53
7	15	23	31	38	46	54	62
8	17	26	35	44	53	62	71

1	2	3	4	5	6	7	8	9	Д	А
2	4	6	8	Д	10	12	14	16	18	1Д
3	6	9	10	13	16	19	20	23	26	29
4	8	10	14	18	20	24	28	30	34	38
5	Д	13	18	21	26	2А	34	39	42	47
6	10	16	20	26	30	36	40	46	50	56
7	12	19	24	2А	36	41	48	53	5Д	65
8	14	20	28	34	40	48	54	60	68	74
9	16	23	30	39	46	53	60	69	76	83
Д	18	26	34	42	50	5Д	68	76	84	92
А	1Д	29	38	47	56	65	74	83	92	Д1

72.

$$\begin{array}{r} 10101001 \\ +\ \ 1110010 \\ \hline 100011011 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1100101100 \\ -\ \ 111111111 \\ \hline 100101101 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 11001001 \\ \times\ \ 1010011 \\ \hline 11001001 \\ 11001001 \\ 11001001 \\ 11001001 \\ \hline 100000100101011 \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} 110111001 & 1001 \\ \cline{2-2} \underline{1001} & 110001 \\ 1001 & \\ \underline{1001} & \\ 01001 & \\ \underline{1001} & \\ 0 & \end{array}$$

73. Будем считать, что человек, задумавший число, умеет записывать числа в двоичной системе. Попросим его записать задуманное число в двоичной системе. Поскольку $128 = 2^7$, задуманное число имеет семь знаков 0 и 1 (при необходимости следует в начале добавить нужное количество 0, а числу 128 поставим в соответствие 7 нулей). Зададим 7 вопросов: верно ли, что на первом месте 1? верно ли, что на втором месте 1?.. верно ли, что на седьмом месте 1? Восьмой вопрос: верно ли, что сумма всех цифр есть число нечетное? Если между первыми семью и восьмым ответами нет противоречия, то все ответы правдивы и задуманное число нам известно. Если же восьмой ответ противоречит первым семи, то это означает, что отвечающий уже использовал свое право на обман и дальше обязан отвечать честно. Теперь за три вопроса легко определим, на какой вопрос был дан неверный ответ. Сначала выясним, верно ли, что все ответы на первые четыре вопроса верны. И т. д.

74. Следовало взять 1 спичку из первой кучки (там, где 11 спичек).

75. В конце записаны «в столбик» данные позиции в двоичной системе. Теперь видим, что все позиции являются «хорошими». Правильный ход в первой — взять две спички из последней кучки. Во второй следует взять 16 спичек из первой кучки (оставить 13). В последней надо оставить в первой кучке 4 спички, а взять 21.

1) 27 → 1 1 0 1 1
18 → 1 0 0 1 0
13 → 1 1 0 1
6 → 1 1 0

2) 29 → 1 1 1 0 1
15 → 1 1 1 1
10 → 1 0 1 0
8 → 1 0 0 0

3) 25 → 1 1 0 0 1
21 → 1 0 1 0 1
17 → 1 0 0 0 1
13 → 1 1 0 1
9 → 1 0 0 1
5 → 1 0 1
1 → 1

76. Приведем только несколько примеров.

$1 \cdot 2 - 3 + 4 + 5 - 6 = 2;$

$1 \cdot 2 + 3 - 4 + 5 \cdot 6 = 31;$

$(-1 + 2) \cdot 3 \cdot 4 + 5 \cdot 6 = 42;$

$-1 - 2 \cdot 3 + (4 + 5) \cdot 6 = 47;$

$1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 \cdot 5 - 6 = 56.$

77. Если дробь сократима, то сократимой является и перевернутая дробь. (Идея «перевертывания» является очень красивой и полезной идеей.)

Возьмем первую дробь, «перевернем» ее:
$\frac{999919}{988027} = 1 + \frac{11892}{988027}.$

Значит, сократимой является и дробь $\frac{11892}{988027}$. Разделим уголком числитель последней дроби на ее знаменатель (с остатком).

Получим в частном 83 и в остатке 991. То есть $\frac{988027}{11892} = 83 + \frac{991}{11892}.$

Но в последней дроби знаменатель делится на числитель $11892 = 991 \cdot 12$. Это означает, что исходная дробь также сократима. Числитель и знаменатель можно сократить на 991. После сокращения получим, что первая дробь равна $\frac{997}{1009}$. Возможно, предложенное решение и не самое лучшее в данном случае. Нужное сокращение можно было бы произвести быстрее, если бы мы сразу обратили внимание, что $999\,919 = 1000^2 - 9^2 = (1000 - 9)(1000 + 9) = 991 \cdot 1009$. Остается проверить, делится ли числитель на 991 или 1009.

Что касается последней дроби, то здесь полезно сначала изучить, как ведут себя произведения чисел, состоящих из одних единиц. (Каким образом до этого можно додуматься, автор умалчивает. Просто он знает, как он получил числитель и знаменатель данной дроби.) Имеем $11 \cdot 11 = 121$, $111 \cdot 1111 = 123\,321$. Не станем выписывать другие равенства, а сразу запишем, как получены числитель и знаменатель данной дроби. Имеем $12\,345\,678\,887\,654\,321 = 1\,111\,111\,111 \cdot 11\,111\,111$; $123\,456\,789\,987\,654\,321 = 1\,111\,111\,111 \cdot 111\,111\,111$.

После сокращения получаем, что данная дробь равна $\frac{11111111}{111111111}$.

Дальнейшее сокращение невозможно.

78. В первом варианте игры при 37 спичках выигрывает начинающий. Своим первым ходом он берет 1 спичку, и затем если соперник берет x спичек, то первый игрок берет $6 - x$ спичек. И поступает так до конца игры. В этой игре плохими числами, то есть числами, при которых начинающий проигрывает, являются числа, кратные 6. Более сложным является второй вариант.

Здесь последовательность 7, 13, 20, 26, 33 и т. д. и является последовательностью «плохих» чисел. В самом деле, если на столе осталось 7 спичек, то на взятие первой спички второй игрок отвечает взятием трех спичек и выигрывает. При других ходах начинающего второй игрок выигрывает сразу.

Пусть на столе 13 спичек. Если первый игрок берет не 3 спички, то второй оставляет ему 7 спичек. А 7, как мы знаем, является «плохим» (для начинающего) числом. Если же начинающий берет 3 спички, то второй берет 5 спичек. Остается на столе 5 спичек. Но так как первый игрок не может повторить ход соперника, то он проигрывает.

Пусть на столе 20 спичек. Если первый игрок берет 1, 2, 4 или 5 спичек, то второй оставит ему 13 спичек. А 13, как мы уже знаем, — число плохое. Если же первый берет 3 спички, то второй берет 5 спичек. Остается 12 спичек. Но первый обязан взять меньше 5 спичек. И затем второй оставляет ему 7 спичек.

Так же разбираются случаи, когда на столе 26 или 33 спички. Во всех рассмотренных случаях начинающий проигрывает. А если на столе 37 спичек, то начинающий выигрывает. Своим ходом он должен взять 4 спички и оставить второму 33.

79. Число 2 при делении на любое натуральное число больше 2 дает остаток 2. Значит, оно и является наименьшим числом, удовлетворяющим условию задачи. Найдем следующее по величине число. Заметим, что если от него отнять 2, то получим число, которое делится на 3, 4, 5 и 6. Наименьшее натуральное число, которое делится на 3, 4, 5 и 6, — это 60 — наименьшее общее кратное чисел 3, 4, 5 и 6. Значит, вторым по величине числом будет 62.

80. Может ли искомое число быть четырехзначным? Поскольку $33^2 = 1089$, а $34^2 = 1156$, среди четырехзначных чисел нет точного квадрата, начинающегося с 111. Рассмотрим числа пятизначные. $105^2 = 11\,025$ (мало), а $106^2 = 11\,236$ (много). И среди пятизначных чисел нет точного квадрата нужного вида. А среди шестизначных такое число имеется: $334^2 = 111\,556$. Оно и является наименьшим.

81. а) Поскольку $1000^3 = 1\,000\,000\,000$, искомое число немного меньше 1000 и заканчивается на 5. Попробуем проверить 995. Это и есть искомое число.

б) Искомое число немного меньше 10 000. Подходит 9999.

82. Преобразуем каждую дробь: $\frac{331999}{31999}=\frac{300\,000+31999}{31999}=\frac{300\,000}{31999}+1$; $\frac{220\,999}{20\,999}=\frac{200\,000}{20\,999}+1$. Отбрасываем в полученных выражениях 1, делим их на 100 000, получаем, что надо сравнить дроби $\frac{3}{31999}$ и $\frac{2}{20\,999}$. Здесь вполне очевидно, что вторая дробь больше ($3 \cdot 20\,999 < 2 \cdot 31\,999$).

83. В этом случае надо делить на три равные, вернее примерно равные, кучки. Ведь 80 на 3 не делится. Итак, кладем на две чаши весов по 27 монет. Если равновесие – фальшивая монета среди 26 оставшихся.

Если монеты на одной из чаш легче – фальшивая среди них. При втором взвешивании кладем на чаши по 9 монет. И так далее.

84. Кладем на чаши весов по 4 монеты. Начнем с самого трудного случая.

Случай 1. Пусть одна чаша (назовем ее чашей *А*) легче другой чаши (*Б*). Занумеруем монеты: на чаше *А* монеты под номерами 1, 2, 3, 4, а на *Б* – с номерами 5, 6, 7, 8. Понятно, что фальшивая монета среди монет с номерами от 1 до 8. Теперь самое главное – сделать правильно второе взвешивание. Кладем на чашу *А* монеты с номерами 4, 5, 6 и 7, а на чашу *Б* – с номерами 8, 9, 10, 11. Возможны 3 случая: *а*) Чаши весов оказались в равновесии. Значит, фальшивой является одна из трех монет: 1, 2, 3, и при этом она легче других. Среди трех подозрительных монет теперь легко найдем фальшивую за одно взвешивание, поскольку знаем, что она легче двух других; *б*) Чаша *А* по-прежнему легче чаши *Б*. Значит, фальшивая среди двух монет, которые остались на своих местах на весах. Это монеты 4 и 8. Сравнивая одну из них с любой правильной монетой, то есть с любой оставшейся, находим фальшивую, а заодно определяем, легче она или тяжелее по сравнению с настоящей монетой; *в*) Чаша *А* стала тяжелее. Значит, фальшивая среди трех перемещенных с одной чаши на другую (их номера 5, 6, 7), и при этом она тяжелее настоящей. Одним взвешиванием находим ее.

Случай 2. Чаши в равновесии. Фальшивая среди 4 отложенных. (С номерами 9, 10, 11, 12.) Сравниваем монеты 9 и 10. Если равновесие, фальшивой является одна из двух монет – 11 и 12. Если равновесия нет, фальшивая одна из двух монет – 9 или 10. В обоих случаях легко находим ее одним взвешиванием.

85. Самое большое число получим, если ученик написал такие числа: 999, 504, 9. (Разность между двумя соседними равна 495). Это убывающая прогрессия. Для возрастающей самое большое число будет для прогрессии 98, 99, 100.

86. В первый стаканчик положим 2 монеты, затем вставим в него второй стаканчик, в который положим 1 монету. Остальные 7 монет положим в третий стаканчик. Понятно, что подобных решений задача имеет очень много. Например, даже можно вставить второй стаканчик в первый, а затем во второй положить 1 монету, а 9 оставшихся монет положить в третий стаканчик.

87. Автор умеет получать 8 из 1 за 15 шагов, а 32 — за 35 шагов. Нашел эти решения автор без помощи компьютера. Возможно, компьютер поможет найти и более короткие решения. Вот решения, найденные автором: 1, 3, 7, 15, 31, 63, 127, 42, 85, 171, 343, 114, 229, 76, 25, 8. А вот вторая цепочка: 1, 3, 7, 15, 31, 63, 127, 42, 85, 171, 343, 114, 229, 76, 153, 307, 102, 205, 411, 823, 274, 91, 183, 367, 735, 1471, 2943, 5887, 11 775, 3928, 1309, 423, 145, 48, 97, 32.

88. $(2 : ((2 - 3) : 3) - 4) : ((4 - 5) : 5) = 50$ или

$2 : (((2 - 3) : ((3 - 4) : 4 - 5)) : 5) = 52{,}5$.

89. Заметим, что $\frac{1}{1\cdot 2} = 1 - \frac{1}{2}$; $\frac{1}{2\cdot 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$; $\frac{1}{3\cdot 4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$; ..., $\frac{1}{99\cdot 100} = \frac{1}{99} - \frac{1}{100}$.

Складывая эти равенства, получаем, что в нашей сумме останутся лишь самое первое слагаемое (1) и самое последнее вычитаемое ($\frac{1}{100}$). Получаем ответ $\frac{99}{100}$. Это, конечно, красиво, можете сказать вы, но как до этого додуматься? Ответ можно получить и иначе (математик мог бы сказать *по индукции*).

Первое слагаемое нашей суммы равно $\frac{1}{2}$. Возьмем последовательно два слагаемых, три, четыре и т. д. Будем получать $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$; $\frac{2}{3} + \frac{1}{3\cdot 4} = \frac{3}{4}$. Теперь несложно догадаться, что наша сумма равна (должна быть равна) $\frac{99}{100}$. Остается лишь немного (!) — доказать это.

90. См. рис. 63.

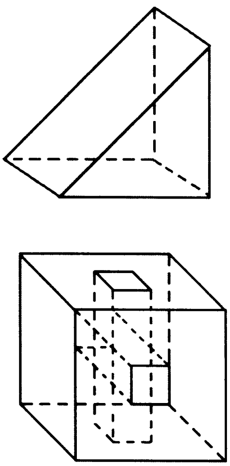


Рис. 63

91. Давайте немного порассуждаем. Если бы одна из старушек шла со скоростью в 2 раза большей, чем другая, то к моменту встречи первая старушка прошла бы в 2 раза больший путь, чем вторая. И значит, оставшийся путь первая старушка прошла бы уже в $2^2 = 4$ раза быстрее второй (оставшийся путь у первой в

2 раза меньше, а идет она в 2 раза быстрее). По условию, оставшийся путь одна старушка прошла за 2 часа, а другая за $4\frac{1}{2} = \frac{9}{2}$. Получается, что первая старушка прошла оставшийся путь в $\frac{9}{4} = \left(\frac{3}{2}\right)^2$ раза быстрее второй. Значит, идет она в $\frac{3}{2}$ раза быстрее. Первая (то есть более быстрая) старушка после встречи шла 2 часа. Значит, второй старушке на этот же путь потребуется в 1,5 раза больше времени, то есть 3 часа. Следовательно, из своих домов старушки вышли в 9 часов утра.

92. Если шестеренок достаточно много (а 101 — достаточно много), то их можно выложить в виде ленты Мёбиуса. Понемногу поворачивая плоскость каждой соседней шестеренки, пока эта плоскость не повернется на 180° (рис. 64). Получившаяся система шестеренок может вращаться.

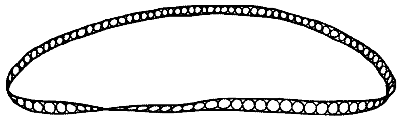


Рис. 64

93. Если вы знакомы с первой книгой про дедушку Гаврилу, то без труда увидите, что эта задача является продолжением рассмотренной там задачи (задача № 46). Решим ее. От станции до дома Петя дойдет за 1 час. Понятно, что по направлению к дому муха пролетит на 3 км больше, чем по направлению к Пете. Ведь каждый раз путь от Пети до дома больше обратного пути от дома до Пети как раз на расстояние, пройденное Петей за соответствующее время. А всего Петя прошел 3 км. Обозначим через x (час) и y (час) соответственно общее время, когда муха летела к дому и обратно. Получаем $x + y = 1$, $20x - 14y = 3$. Умножим первое уравнение на 20 и вычтем из него второе. Получим $34y = 17$, $y = \frac{1}{2}$. Значит, и $x = \frac{1}{2}$. Путь, проделанный мухой, равен 17 км.

94. Число сыгранных партий равно (15 + 9 + 14) : 2 = 19. Каждый из игроков пропускал не более одной партии подряд. Боря сыграл 9 партий. Это возможно лишь при условии, что он играл лишь в четных партиях. В любом другом случае число сыгранных им партий было бы больше 9. Следовательно, в тринадцатой партии играли Вася и Толя.

95. Решение понятно из рис. 65.

96. Каждый отрезок клетчатой бумаги внутри прямоугольника будет либо принадлежать линии разреза, либо нет. Нам надо, чтобы общая длина всех отрезков, не являющихся разрезами, была бы как можно больше. Рассмотрим всевозможные фигуры, со-

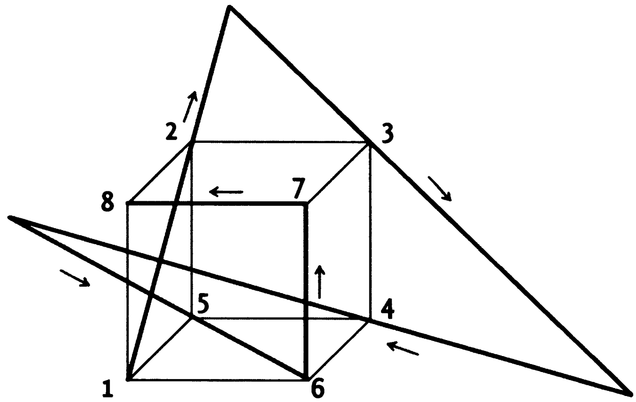


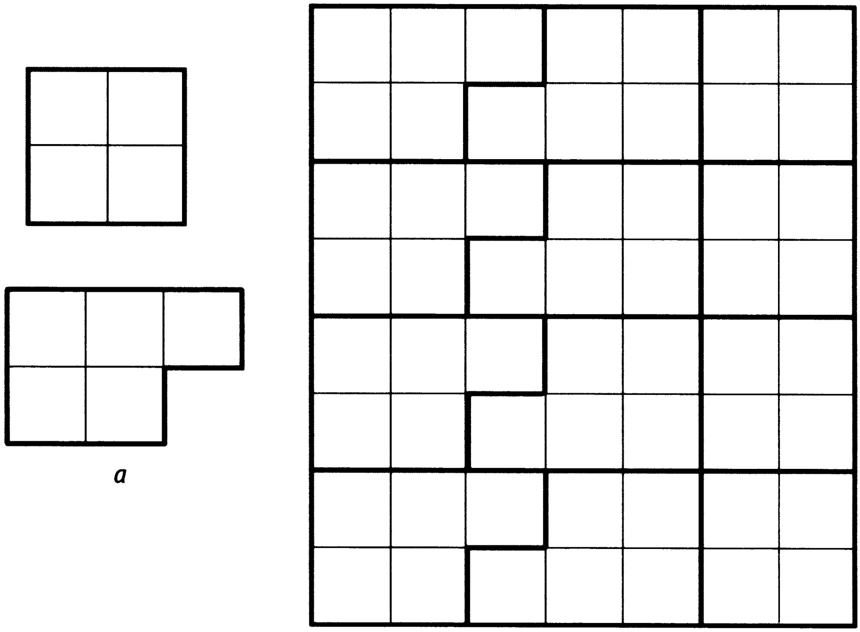
Рис. 65

ставленные не более чем из 5 клеток. И подсчитаем отношение числа отрезков внутри фигуры к числу образующих ее клеток. Наибольшим и равным 1 это отношение будет для двух фигур: квадрата 2 × 2 и такого же квадрата, к которому добавлена одна клетка (рис. 66, *а*). Значит, если мы сможем разрезать данный прямоугольник на фигуры двух указанных видов, то получим искомое разрезание. Сделать это нетрудно (рис. 66, *б*).

97. Самое лучшее, что может предложить здесь автор, — это попытаться угадать нужное число. Заметим, что $11^2 = 121$, $111^2 = 12\,321$, $1111^2 = 1\,234\,321$. Теперь нетрудно понять, что ответом на нашу задачу будет число, состоящее из 9 единиц: 111 111 111.

98. Обозначим через $6x$ число учащихся, участвовавших в одном соревновании. Тогда из условия следует, что только в двух соревнованиях участвовали $3x$, а во всех трех — $2x$ учащихся. Сложив числа, данные в условии, мы сосчитаем учеников, участвовавших в одном соревновании 1 раз, в двух соревнованиях — 2 раза, в трех — 3 раза. Получаем уравнение $100 + 50 + 48 = 6x + 6x + 6x$, откуда $x = 11$. Число учащихся равно $6x + 3x + 2x = 11x = 121$.

99. Шериф может поймать Джо, действуя следующим образом: сначала он подряд обследует все пещеры, начиная с первой. Если преступник не обнаружен, то это означает, что в какую-то ночь Джо перебежал в только что осмотренную пещеру, а в предыдущий день он находился в соседней пещере. Это означает, что в этот день сумма номеров пещер, занимаемых преступником и осматриваемых шерифом, нечетна. Но после каждого шага



а

б

Рис. 66

(каждого дня) и шериф, и преступник меняют номер «своей» пещеры на 1. Это означает, что суммарная четность этих пещер не меняется, то есть в нашем случае она всегда нечетна (пока шериф осматривает пещеры от первой до шестнадцатой). На следующий день после осмотра шерифом последней пещеры Джо должен перейти в пещеру с четным номером. А шериф на следующий день начнет снова осматривать пещеры, начиная со второй и в том же порядке. На этот раз обе пещеры, осматриваемая и занимаемая преступником, имеют одинаковую четность. Когда шериф доберется до четырнадцатой пещеры, то преступник, если он еще не пойман, должен находиться в шестнадцатой пещере. На следующий день он будет пойман в пятнадцатой пещере. Всего для поимки Джо шерифу потребуются 30 дней. Так что 31 мая он сможет отрапортовать начальству об успешном завершении операции.

Между прочим, шериф мог бы поймать Джо и быстрее, за 28 дней. Сначала он за 14 дней просмотрит все пещеры со второй по пятнадцатую. Если Джо не пойман, то это означает, что в первый день Джо был в пещере с нечетным номером. (Проверьте, что в ином случае Джо был бы пойман.) Значит, когда шериф будет осматривать пятнадцатую пещеру, Джо будет находиться в пещере с четным номером. Осмотрев пятнадцатую пещеру и не обнаружив Джо, шериф на следующий день вновь осматривает пещеру под номером 15. На сей раз Джо уже должен находиться в пещере с нечетным номером. И теперь, просматривая пещеры в обратном порядке от пятнадцатой до второй (еще 14 дней), шериф непременно поймает Джо.

Если вы не очень разобрались в решении, разберите самостоятельно случаи, когда число пещер меньше: 3, 4, ...

100. Вообще говоря, рисунок Тома нам вовсе и не нужен. Он лишь облегчает нам решение. Продолжим отрезок AN (рис. 67) за точку N на расстояние, равное длине отрезка, и получим точку K (K – симметрична A относительно N). Понятно, что точка K лежит на прямой BC, причем $CK = BC$. Точно так же, продолжив отрезок C_1M за точку M на расстояние, равное ему, получим точку P. Точки K и P (вернее, их изображения) легко строятся, если указаны изображения точек A и C_1. Разделив отрезок PK на три равные части, построим изображения точек B и C. После чего строим изображения остальных вершин параллелепипеда. Это можно делать различными способами. Например, в такой последовательности: B_1, D, D_1, A_1. Таким образом, мы вполне однозначно можем восстановить изображения всех вершин параллелепипеда на рисунке Билла, но сам рисунок однозначно мы не можем восстановить. У нас есть две возможности указать невидимые ребра параллелепипеда на его рисунке.

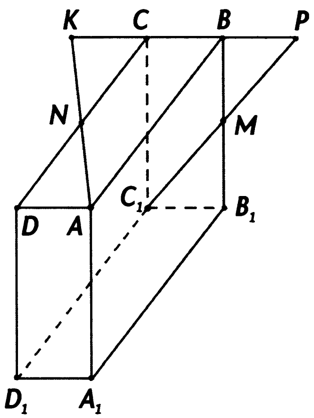


Рис. 67

101. Допустим, химиков больше, чем алхимиков. Поскольку общее число участников конференции равно 100 (четное число), то химиков не менее 51, а алхимиков не более 49. Значит, среди опрошенных был бы хотя бы один химик и он должен был бы сказать, что среди оставшихся больше химиков. Точно так же, если бы алхимиков было больше, то среди опрошенных должен быть хотя бы один алхимик, и он, солгав, сказал бы, что среди оставшихся больше химиков. Значит, в конференции участвуют 50 химиков и 50 алхимиков.

102. Джон должен получить 1 доллар 60 центов, так как еще 20 центов ему должен отдать Билл. В самом деле: каждый съел по $\frac{7}{3}$ пакета, значит, $\frac{1}{3}$ пакета стоит 20 центов, а Билл съел на $\frac{1}{3}$ пакета больше, чем купил.

103. Посчитаем, сколько вырыли бы землекопы, если бы они работали все вместе. Так как каждый из них работал половину времени, необходимого двум другим, чтобы вырыть канаву, то работая вместе с ним, двое других вырыли бы дополнительно половину канавы. Таким образом, работая все вместе, они бы вырыли за 2,5 часа 2,5 канавы (дополнительно 1,5 канавы). То есть одну канаву все вместе вырыли бы за 1 час.

104. На рис. 68 сплошными и пунктирными линиями изображены основания восьми пирамид. (Четыре сплошными и четыре пунктирными.) Все восемь оснований лежат в одной плоскости. Каждая четверка пирамид имеет еще общую вершину. Но эти общие вершины лежат по разные стороны от плоскости, в которой лежат основания. Нетрудно понять, что указанные восемь пирамид попарно соприкасаются по куску поверхности.

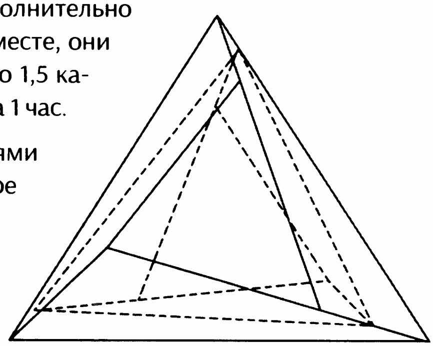


Рис. 68

105. Одно из возможных решений изображено на рис. 69.

106. См. рис. 70.

107. Будем исходить из того, что Алгоритмиков (A) — человек сообразительный (все-таки математик) и при первой возможности определил бы возраст детей. Возраст приятеля ему известен. Предположим, Воображайлину (B) 30 лет. Представим 30 в виде произведения трех сомножителей (отбрасывая явно неразумные, вроде $1 \cdot 1 \cdot 30$).

$$30 = 1 \cdot 2 \cdot 15 = 1 \cdot 3 \cdot 10 = 1 \cdot 5 \cdot 6 = 2 \cdot 3 \cdot 5.$$

Как видите, в каждом произведении суммы сомножителей различны. Поэтому, узнав по числу окон эту сумму, A определил

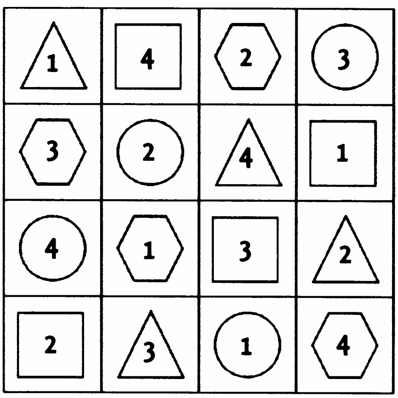


Рис. 69

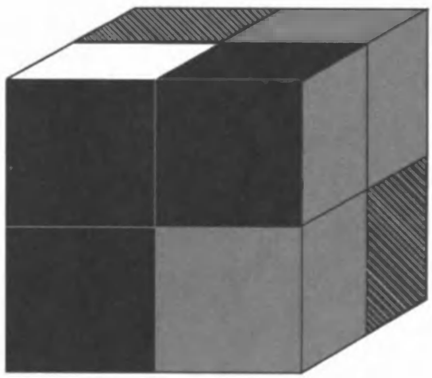


Рис. 70

бы и возраст детей. Итак, возраст B не равен 30. Рассмотрим в качестве второго примера случай, когда B 35 лет. Здесь совсем просто, поскольку представить 35 в виде произведения трех множителей можно единственным образом: $1 \cdot 5 \cdot 7$. Так, просмотрев все возможные варианты (в разумных пределах), мы убедимся, что во всех случаях, кроме двух, зная произведение и сумму трех сомножителей (натуральных!), мы сможем найти эти множители. Исключений ровно два: $36 = 2 \cdot 2 \cdot 9 = 1 \cdot 6 \cdot 6$ и $40 = 2 \cdot 2 \cdot 10 = 1 \cdot 5 \cdot 8$. (В каждом случае равны произведения и суммы сомножителей.) Наличие среднего сына показывает, что имеет место последний вариант. В семье Вображайлиных три сына в возрасте 1, 5 и 8 лет.

108. $\frac{3}{10}$.

109. $\frac{1}{3}$.

110. Пока все шары на месте, вероятность того, что вынутый шар — черный, одинакова, что для первого, что для пятого, что для последнего, и равна $\frac{4}{11}$. Остальное вы легко решите сами.

111. Перед началом экзамена вероятность вытащить тот или иной билет одна и та же (равна $\frac{1}{n}$, где n — число билетов) и не зависит от того, каким по порядку вы сдаете экзамен.

112. Вероятность того, что событие A не произойдет, равна $1 - 0,7 = 0,3$.

113. Вася может рассуждать так: «Пусть я сяду на какое-то место... Нет, лучше так. Пусть Маша сядет на какое-то место. Все места одинаковы, и все равно, на каком месте она окажется. Тогда мне достанется одно из 10 оставшихся мест. А меня интересуют только 2 из них. Поскольку все места одинаковы (равновозможны), вероятность интересующего меня события равна 0,2».

114. Далеко не всегда и даже, наоборот, очень редко мы встречаемся с событиями, когда обе возможности: «событие произойдет» и «событие не произойдет» — равновозможны.

115. 1) $\frac{5}{11}$;

2) $\frac{3}{11}$;

3) $\frac{2}{11}$;

4) $\frac{6}{11}$;

5) $\frac{5}{11}$.

Обратите внимание: вероятность того, что число делится на 3 или 5 (событие 5), равна сумме вероятностей двух событий: число делится на 3 (событие 2) и число делится на 5 (событие 3). А вот вероятность того, что число делится на 2 или 5, не равна сумме вероятностей соответствующих событий. Дело в том, что среди рассматриваемых чисел нет числа, которое делится на 3 и 5 (как говорят математики, события 2 и 3 несовместны, не пересекаются). А вот число, которое делится на 2 и 5, среди рассматриваемых чисел имеется. Это 10. (События 1 и 3 совместны, пересекаются.)

116. а) У игрального кубика суммы чисел на противоположных гранях равны 7. Но противоположные грани мы видеть не можем. Всего мы можем видеть 8 троек граней или чисел (по числу вершин). Их легко все перечислить: (1, 2, 3), (1, 2, 4), (1, 3, 5), (1, 5, 4), (6, 2, 3), (6, 2, 4), (6, 5, 3), (6, 5, 4). Поскольку все варианты равновозможны, вероятность, что сумма очков 12, равна $\frac{1}{8}$. б) Сумма очков не может равняться 13. Значит, вероятность этого события равна 0.

117. Переставляя числа 1, 2, 3, 4 всевозможными способами, получим 24 перестановки: (1, 2, 3, 4), (1, 2, 4, 3), (1, 3, 2, 4), (1, 3, 4, 2), (1, 4, 2, 3), (1, 4, 3, 2), (2, 1, 3, 4), (2, 1, 4, 3), (2, 3, 1, 4), (2, 3, 4, 1), (2, 4, 1, 3), (2, 4, 3, 1), (3, 1, 2, 4), (3, 1, 4, 2), (3, 2, 1, 4), (3, 2, 4, 1), (3, 4, 1, 2), (3, 4, 2, 1), (4, 1, 2, 3), (4, 1, 3, 2), (4, 2, 1, 3), (4, 2, 3, 1), (4, 3, 1, 2), (4, 3, 2, 1). Каждой перестановке соответствует вариант отправки писем. Первая означает, что все письма отправлены по своему адресу. В пункте д) ответ $\frac{1}{24}$. Понятно, что событие в пункте г) является невозможным. Ведь если три письма пришли по своему адресу, то и четвертое также придет по своему адресу. В пункте г) ответ 0. Пункту в) соответствуют 6 вариантов. Здесь ответ $\frac{6}{24}=\frac{1}{4}$. Рассмотрим пункт б). В двух случаях по своему адресу придет только письмо 1. То же верно для писем 2, 3 и 4. Всего 8 вариантов. Ответ $\frac{8}{24}=\frac{1}{3}$. Остается пункт а). Здесь ответ $\frac{9}{24}=\frac{3}{4}$. (Число вариантов равно $24 - 1 - 6 - 8 = 9$.)

118. а) Занумеруем в первом ящике все шары от 1 до 10, при этом белым шарам присвоим номера от 1 до 7. Соответственно во втором ящике белые шары будут иметь номера от 1 до 6, а все-

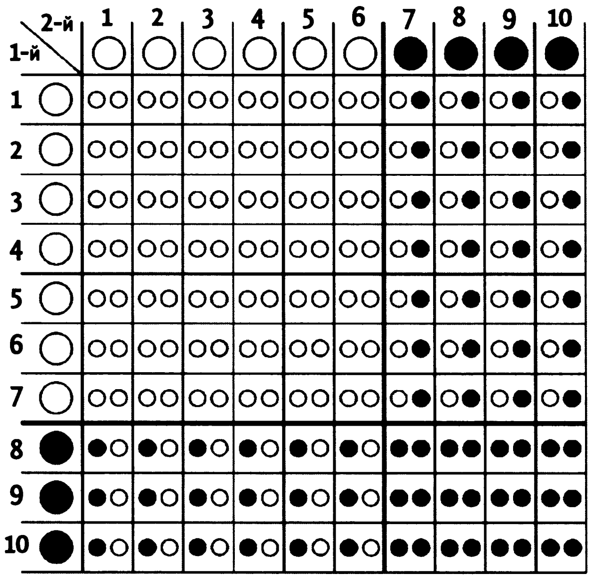


Рис. 71

го 10 номеров. Всего исходов будет $10 \times 10 = 100$. (Здесь полезно сделать рис. 71.) Оба шара белые будут в $7 \times 6 = 42$ случаях. Вероятность будет $0{,}7 \cdot 0{,}6 = 0{,}42$. Таким образом, вероятность того, что оба шара — белые, равна произведению вероятностей того, что из первого ящика вынули белый шар и из второго также вынули белый шар. Получаем, что если шары вынимают из ящиков независимо друг от друга, соответствующие вероятности перемножаются. И вообще, если два события независимы, то вероятность, что они оба произойдут, равна произведению вероятностей того, что произойдет каждое из них.

б) $0{,}3 \cdot 0{,}4 = 0{,}12$.

в) Здесь ответ можно получить двумя способами (рис. 71). Можно от 1 отнять две первые вероятности. Получим $1 - 0{,}42 - 0{,}12 = 0{,}46$. А можно сложить две вероятности: белый шар из первого ящика, а черный — из второго, и наоборот. Получим $0{,}7 \cdot 0{,}4 + 0{,}3 \cdot 0{,}6 = 0{,}46$.

119. В первом пункте вероятность равна произведению вероятностей того, что на каждой монете выпадет орел, равна $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$. Также получим, что во втором случае вероятность равна $\left(\frac{1}{2}\right)^{100}$.

120. Поскольку $2^{10} = 1024 > 10^3$, $2^{100} > 10^{30}$. Итак, нам потребуется более, чем 10^{30} секунд. Что это за число – единица и 30 нулей? Будем считать. В минуте 60 секунд. В часе 3600 секунд. Меньше, чем 4000. В сутках меньше, чем 100 000 секунд. А в году меньше $40\,000\,000 = 4 \cdot 10^7$ секунд. Разделим 10^{30} на $4 \cdot 10^7$. Поскольку $10^{30} = 100 \cdot 10^{28}$, получим, что нам потребуется более, чем $25 \cdot 10^{21}$ лет. Надо к числу 25 приписать 21 нуль. Напомним, что миллиард – это 1 и 9 нулей. А триллион – это 1 и 12 нулей. Поэтому 1 и 21 нуль – это миллиард триллионов лет. Итак, чтобы подбросить монету 2^{100} раз, потребуется более 25 миллиардов триллионов лет. Это огромное число. Ученые считают, что возраст Земли не превышает 5 миллиардов лет.

121. Будем предполагать, что помеченные рыбины равномерно перемешались среди всех рыб, плавающих в пруду. То есть имеет место пропорция $\frac{18}{123} = \frac{100}{x}$. Значит, число рыб в пруду (величина x) приблизительно равно $\frac{123 \cdot 100}{18} \approx 680$. Можно говорить, что в пруду живет примерно 650 – 700 рыб. При этом надо бы указать, с какой вероятностью мы можем это утверждать. Но для этого нужно достаточно хорошо знать теорию вероятностей. А мы же сделали лишь самые первые шаги.

122. Рассуждать можно следующим образом. Примерно 100 человек отвечали на первый вопрос и, естественно, сказали «да». Из 100 отвечавших на второй вопрос «да» сказали 30 человек. Значит, процент курящих близок к 30. Здесь опять надо сделать то же замечание, что и в предыдущей задаче.

123. Вероятности победить для первых трех бегунов соответственно равны 0,4, 0,3 и 0,2. Вероятность, что победит кто-то из них, равна $0{,}4 + 0{,}3 + 0{,}2 = 0{,}9$. Значит, вероятность, что победит Гринберг, равна 0,1, а вероятность, что он не победит, будет 0,9.

124. Возможны 6 вариантов – продолжать борьбу будут: 1) Бельгия и Япония; 2) Бельгия и Россия; 3) Бельгия и Тунис; 4) Япония и Россия; 5) Япония и Тунис; 6) Россия и Тунис. Сумма вероятностей этих событий равна 1. Для того чтобы определить вероятность выхода в следующий этап Бельгии, надо сложить вероятности событий 1), 2) и 3); вероятность выхода из группы сборной Японии равна сумме вероятностей для событий 1), 4) и 5) и т. д. Поэтому если мы обозначим через *а*, *б*, *в* и *г* вероятности выйти в следующий этап для Бельгии, Японии, Туниса и России, то увидим, что сумма *а* + *б* + *в* + *г* равна 2, поскольку каждое из событий 1)–6) мы посчитали дважды. Получается, что вероятность выхода России в следующий этап равна $2 - 0{,}7 - 0{,}6 - 0{,}3 = 0{,}4$.

125. Занумеруем эту группу людей. Какова вероятность, что все дни рождения всех 30 человек различны? Пусть первый родился в какой-то день. Тогда для второго остается 364 возможности из 365. И вероятность, что его день рождения не совпадает с днем рождения первого, равна $\frac{364}{365}$. И т. д. Вероятность, что день рождения третьего не совпадает с днями рождения первого или второго, равна $\frac{363}{365}$. И т. д. Вероятность, что день рождения тридцатого человека не совпадает с днями рождения 29 предыдущих, будет в таком случае равна $\frac{365-29}{365} = \frac{336}{365}$. Чтобы найти вероятность, что все дни рождения различны, надо перемножить полученные дроби. Здесь имеет смысл воспользоваться помощью калькулятора или компьютера.

126. Так будет, если после отправления троллейбуса № 12 почти сразу приходит троллейбус № 20. Зато после этого возникает достаточно большой перерыв. И Васе, чтобы попасть в библиотеку, надо появиться на остановке после ухода 12-го, но до прихода 20-го. А это маловероятно.

127. Надо монету бросить дважды. Если выпадет *ОР*, выигрывает один. Если *РО*, выигрывает другой. При других исходах жребий бросают еще раз. Понятно, что исходы *ОР* и *РО* равновероятны. Такой прием нередко используется на практике. Это один из вариантов так называемой *симметризации*.

128. Есть два варианта: *МПМ* (мама — папа — мама) и *ПМП*. В первом случае Феде придется дважды играть с более слабым соперником, а во втором — с более сильным. И все же второй вариант более выгоден. Ведь самое трудное — выиграть у папы. И выиграть хотя бы один раз из двух легче, чем один раз из одного. Рассмотрим пример. Пусть Федя выигрывает у папы с вероятностью 0,3, а у мамы — с вероятностью 0,6. У Феди есть два варианта добиться желаемого результата: выиграть две первые партии (в этом случае третью партию можно не играть) и, проиграв первую партию, выиграть две оставшиеся. В варианте *МПМ* вероятность успеха Феди равна $0{,}6 \cdot 0{,}3 + 0{,}4 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}6 = 0{,}252$. Во втором варианте эта вероятность равна $0{,}3 \cdot 0{,}6 + 0{,}7 \cdot 0{,}6 \times 0{,}3 = 0{,}306$. Впрочем, можно было и не вычислять сумму. Вторая сумма очевидно больше, поскольку первые слагаемые одинаковы, а второе слагаемое больше во второй сумме. Попробуйте самостоятельно провести рассуждение в общем случае, обозначив вероятности выигрыша у папы и мамы через x и y ($y > x$).

129. Бесспорно, может. В худшем варианте ведущий может положить в четыре ящика по одному билету без выигрыша, а в пятый все оставшиеся билеты. В лучшем же (для участника лотереи) случае он может сделать наоборот: в четыре ящика положить по выигрышному билету, а оставшиеся билеты положить в пятый ящик. В первом случае участник лотереи получит приз, если он угадает нужный ящик (вероятность $\frac{1}{5}$), а в нем угадает выигрышный билет (вероятность $\frac{5}{26}$). Значит, вероятность выигрыша равна произведению указанных вероятностей, то есть равна $\frac{1}{26}$. Рассмотрим второй вариант и найдем вероятность не выиграть. Для этого надо угадать соответствующий ящик (вероятность $\frac{1}{5}$), а из него достать не выигрышный билет (вероятность $\frac{25}{26}$). Вероятность не выиграть равна $\frac{5}{26}$, а значит, вероятность получить приз равна $1-\frac{5}{26}=\frac{21}{26}$. Именно в этих пределах (от $\frac{1}{26}$ до $\frac{21}{26}$) и заключена вероятность получить приз, хотя не все значения в этих границах могут быть получены.

130. Выгоднее изменить свой выбор. Как ни странно, но многие этого не понимают. Большинство считают, что обе возможности равноправны. Но это не так. Вот простое рассуждение, объясняющее, почему выгоднее сменить. Если вы сохраняете свой выбор, то выигрываете лишь в том случае, когда угадали с самого начала, то есть с вероятностью $\frac{1}{3}$. Если же вы меняете свой выбор, то выигрываете, если не угадали с первой попытки, то есть с вероятностью $\frac{2}{3}$. При этом вы даже можете не смотреть, какую шкатулку открыл ведущий, а, отвернувшись, сказать: «Меняю выбор».

131. Начнем с Алика. Поскольку средняя зарплата в его компании равна 660 у. е., то сумма всех зарплат равна $660 \cdot 100 = 66\,000$ у. е. (Средняя зарплата равна сумме зарплат, поделенной на число работников.) Если обозначить за x зарплату вице-президента, тогда зарплата президента будет $3x$. Получаем уравнение $66\,000 = 150 \cdot 90 + 3500 \cdot 5 + 4x + 3x$. Из этого уравнения находим $x = 5000$. Такова в у. е. зарплата вице-президента. Зарплата же президента равна 15 000 у. е. В компании Бори зарплаты вице-президентов и президента равны соответственно 6000 и

18 000 у. е. Что касается *моды*, то она в каждой компании как раз и равна зарплатам Алика и Бориса.

132. Вероятность того, что игрок угадает подряд 3 раза, равна $\frac{1}{8}$.

Это означает, что в среднем он будет выигрывать 1 раз из 8 игр. Значит, он в среднем за каждые 8 игр будет проигрывать 1 рубль. Эта игра невыгодна тому, кто пытается угадать.

133. Коробочка *В* выигрывает у *А* в двух случаях из трех. Рассмотрим пару *Б* и *В*. Поскольку каждая карточка из *Б* может оказаться в паре с любой карточкой из *В*, у нас имеется $3 \times 3 = 9$ равновероятных исходов. (2; 1) — 2 исхода, (2; 4) = 4 исхода, (5; 1) — 1 исход и (5; 2) — 2 исхода. Как видим, в 5 случаях из 9 коробочка *Б* «побеждает» коробочку *В*. При игре втроем будет также 9 исходов. *А* побеждает в двух случаях, *Б* — в трех и *В* — в четырех. Лучшей оказывается *В*.

134. При игре между *А* и *Б* будет 24 равновероятных исхода. В 14 случаях *А* выигрывает. Также *А* чаще выигрывает и при игре с *В* (в 13 случаях из 24). Сравним *Б* и *В*. Всего будет $24 \times 24 = 576$ равновероятных исходов.

При этом в $24 \times 13 = 312$ случаях побеждает *Б*. Ведь *Б* выигрывает всякий раз, когда из *В* вынимают карточку с 1.

Итак, *В* проигрывает и *А*, и *Б* в парных соревнованиях. А что произойдет при игре втроем?

Возможны следующие исходы (их 576).

(3, 2, 1) в $14 \times 13 = 182$ случаях. Здесь выигрывает *А*.

(3, 2, 7) в $14 \times 11 = 154$ случаях. Выигрывает *В*.

(3, 4, 1) в $5 \times 13 = 65$ случаях. Выигрывает *Б*.

(3, 4, 7) в $5 \times 11 = 55$ случаях. Выигрывает *В*.

(3, 6, 1) в $5 \times 13 = 65$ случаях. Выигрывает *Б*.

(3, 6, 7) в $5 \times 11 = 55$ случаях. Выигрывает *В*.

Получается, что *А* побеждает в 182 случаях, *Б* — в 130, а вот *В* выигрывает в 264 (!) случаях. То есть побеждает, и довольно уверенно.

135. Конечно, можно поступить, как тот же командир полка. Взяв вместо солдат что-нибудь попроще. Например, спички. А можно попробовать поискать закономерности. Начнем с какого-нибудь небольшого числа. Например, 10. При 10 участниках выигрывает номер 4. Перейдем к 11 участникам. После того как выбудет номер 3, останется 10 человек. Новый отсчет начнется с четвертого номера, и останется участник под номером $7 = 3 + 4$. При 12 участниках останется участник под номером $3 + 7 = 10$. При 13 — под номером $3 + 10 = 13$, а при 14 — под номером $3 + 13 = 16$. Но номер 16 — это все равно что $16 - 14 = 2$. Итак, при

14 участниках победителем будет номер 2. Как мы видим, номер победителя всякий раз увеличивается на 3, пока не перейдет через последнего игрока.

Посмотрим, что будет при $14 + 6 = 20$ участниках. Номер победителя равен $2 + 6 \cdot 3 = 20$. Выигрывает последний. Значит, при 21 участнике выиграет номер $20 + 3 - 21 = 2$.

При $21 + 9 = 30$ участниках выиграет номер $2 + 9 \cdot 3 = 29$. А при 31 участнике выиграет номер 1.

При $31 + 15 = 46$ участниках выигрывает номер $1 + 45 = 46$ участник. При 47 вновь номер 2.

При $47 + 22 = 69$ участниках выиграет номер $2 + 66 = 68$. При 70 побеждает номер 1.

При $70 + 34 = 104$ участниках выигрывает номер $1 + 102 = 103$, а при 105 вновь номер 1.

При $105 + 52 = 157$ участниках побеждает номер $1 + 156 = 157$. А при 158 побеждает номер 2.

При $158 + 78 = 236$ участниках победит номер $2 + 234 = 236$. При 237 участниках побеждает номер 2.

При $237 + 63 = 300$ участниках побеждает номер $2 + 189 = 191$. Это и является ответом на вопрос задачи.

136. При всех допустимых значениях букв верны равенства: a), c), e), f), g).

137. 1) $19 \cdot 21 = (20 - 1)(20 + 1) = 20^2 - 1 = 399$;
2) $99^2 - 98^2 = (99 - 98)(99 + 98) = 197$;
3) $23 \cdot 27 = 625 - 4 = 621$;
4) $123^2 - 122^2 = 245$;
5) $99 \cdot 101 = 10\,000 - 1 = 9999$;
6) $1002 \cdot 998 = 999\,996$;
7) $103^2 - 3^2 = 10\,600$;
8) $1011^2 - 121 = (1011 + 11)(1011 - 11) = 1\,022\,000$;
9) $999^2 - 1 = 998\,000$;
10) $117 \cdot 119 - 118^2 = -1$;
11) Обозначим $1986 = x$. Данное выражение равно $(x - 1)(x + 1) - (x - 2)(x + 2) = (x^2 - 1) - (x^2 - 4) = 3$.
12) $998 \cdot 1002 - 999^2 = (1000^2 - 4) - 999^2 = (1000^2 - 999^2) - 4 = 1999 - 4 = 1995$.
13) Числитель первой дроби равен $(2193 + 1998)(2193 - 1998) = 4191 \cdot 195$. Вторая дробь преобразуется в $3901 \cdot 95$ и после сокращения преобразуется к 95. Ответ: $195 - 95 = 100$.
14) Обозначим $1995{,}37 = x$. Данное выражение есть $x(x + 1) - (x - 1)(x + 2) = 2$.
15) Поскольку $2897{,}2897 = 2897 \cdot 1{,}0001$, а $2896{,}2896 = 2896 \times 1{,}0001$, уменьшаемое равно вычитаемому. Выражение равно 0;

16) $1357 \cdot 2634{,}2634 - 2634 \cdot 1357{,}1357 = 0$.

17) Пусть $123\,456\,789 = a$. $456\,321\,987 = b$. Данное выражение равно $ab - 2(a-1)(b+1) + (a-2)(b+2) = ab - 2(ab - b + a - 1) + (ab - 2b + 2a - 4) = -2$.

138. Пусть первый член равен a, а второй равен b. Попробуем вычислить несколько первых членов, в надежде получить какую-нибудь закономерность. Имеем $a_3 = \dfrac{b+1}{a}$, $a_4 = \dfrac{\frac{b+1}{a}+1}{b} = \dfrac{b+a+1}{ab}$,

$$a_5 = \frac{\frac{b+a+1}{ab}+1}{\frac{b+1}{a}} = \frac{b+a+1+ab}{(b+1)b} = \frac{(b+1)(a+1)}{(b+1)b} = \frac{a+1}{b},$$

$$a_6 = \frac{\frac{a+1}{b}+1}{\frac{b+a+1}{ab}} = a = a_1, \quad a_7 = (a+1) : \frac{a+1}{b} = b.$$

Вот она, закономерность. Оказывается, члены с номерами 1, 6, 11, ... равны между собой. Точно так же равны члены с номерами 2, 7, 12, ... И вообще, если разность номеров делится на 5, то такие члены равны. Следовательно, $a_{2006} = a_1 = 1917$.

139. Через 1 час расстояние между автомобилями стало равным $S - v \cdot 1$ ч. (Первый автомобиль проехал такое расстояние: время $\cdot$ скорость = 1 ч $\cdot$ v км/ч = v км.) Поскольку сближаются автомобили со скоростью $v + u$ км/ч, получаем равенство $S - v = (v + u)(t - 1)$. Подставляя в это равенство заданные величины, получим $t = 5$ часов.

140. $t = \dfrac{S}{2v} + \dfrac{S}{2u}$.

141. 1) $x = 2$.

2) Уравнение не имеет решения.

3) $x = 0$. Сумма неотрицательных чисел равна 0, только если все эти числа равны 0.

4) Уравнение не имеет решения.

5) Уравнение не имеет решения.

6) $x = -1$.

7) Решением является любое число.

8) $x_1 = 1$, $x_2 = -2$.

9) $x_1 = -1$, $x_2 = -\dfrac{1}{2}$.

10) $x_1 = \dfrac{5}{2}$, $x_2 = \dfrac{2}{5}$.

11) Перенесем все в левую часть и вынесем за скобки множитель $(x + 1)$. Получим $(x + 1)(3x + 2 - x - 3) = 0$, или $(x + 1)(2x - 1) = 0$. Откуда $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{1}{2}$.

12) Раскроем скобки в левой части: $(x - 1)^2 = x^2 - 2x + 1$. Ответ: $x = 1$.

13) $x = -1$.

14) $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$.

15) $x_1 = -1$, $x_2 = 1$.

16) Вынесем за скобки $(x + 1)$, получим $(x + 1)(3x + 4) = 0$. Откуда $x_1 = -1$, $x_2 = -\frac{4}{3}$.

17) Перенесем всё в левую часть и вынесем за скобку $x(x - 2)$, получим $x(x - 2)(-2x - 2) = 0$. Откуда $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = -1$.

18) Преобразуем левую часть: $y^2 - 3y + 2 = y^2 - 2y - y + 2 = y(y - 2) - (y - 2) = (y - 2)(y - 1)$. Затем найдем решение: $y_1 = 1$, $y_2 = 2$.

19) Перенесем все в левую часть, получим: $x^3 - x^2 + x - 1 = 0$, $x^2(x - 1) + x - 1 = 0$, $(x - 1)(x^2 + 1) = 0$, откуда $x = 1$.

20) Разложим левую часть уравнения на множители: $x(x^4 - 1) + 2(x^4 - 1) = (x^4 - 1)(x + 2)$. Ответ: $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = -2$.

21) Перенесем все в левую часть и умножим на x. Получим уравнение $x - 2 + x(x - 2) = 0$, или $(x - 2)(x + 1) = 0$. Ответ: $x_1 = 2$, $x_2 = -1$. *Замечание.* Надо заметить, что умножение на x в некоторых случаях может привести к появлению лишнего корня $x = 0$ (так будет в уравнении $x - 1 = 0$). В данном случае этого не происходит.

22) Перенесем все в левую часть и умножим на y^2. Получим: $y^2 - 5y + 6 = 0$. Разложим левую часть на множители: $y^2 - 2y - 3y + 6 = y(y - 2) - 3(y - 2) = (y - 2)(y - 3)$. Ответ: $y_1 = 2$, $y_2 = 3$.

23) Уравнение преобразуется к виду $(x - 1)(x - 99) = 0$. Ответ: $x_1 = 1$, $x_2 = 99$.

142. Задача решена в тексте.

143. *Арифметическое решение.* Если бы на верхней полке было бы столько же книг, как и на нижней, то на обеих полках было бы $123 + 11 = 134$ книги. Значит, на нижней полке 67 книг, а на верхней $67 - 11 = 56$ книг. *Алгебраическое решение.* Задачу можно решать как с одним, так и с двумя неизвестными. С одним неизвестным: обозначим через x количество книг на нижней полке. Тогда на верхней будет $x - 11$ книг. Получаем уравнение $x + x - 11 = 123$. С двумя неизвестными: обозначим через x и y число книг соответственно на нижней и верхней полках. Получаем систему уравнений (два уравнения с двумя неизвестными): $x + y = 123$, $x - y = 11$.

144. 82 и 41.

145. *Арифметическое решение.* Если бы на верхней полке было бы столько же книг, сколько и на нижней, то на всех трех полках было бы $134 + 11 = 145$ книг. При этом на верхней и на нижней было бы в 2 раза больше, чем на средней. Получаем задачу на части. Всего 5 частей. Одна часть равна $145 : 5 = 29$. Столько книг на средней полке. На нижней 58, а на верхней $58 - 11 = 47$ книг. Алгебраическое решение найдите самостоятельно.

146. *Арифметическое решение.* Если мы снимем с верхней полки 4 книги, со следующей — 3 книги, затем 2 и 1 книгу, то на всех полках книг окажется поровну. Всего мы сняли $4 + 3 + 2 + 1 = 10$ книг. Значит, на нижней полке $190 : 5 = 38$ книг, а на других соответственно 39, 40, 41 и 42 книги. *Алгебраическое решение.* Если на нижней полке x книг, то на следующих, считая от нижней, будет $x + 1$, $x + 2$, $x + 3$ и $x + 4$ книги. Получаем уравнение $x + x + 1 + x + 2 + x + 3 + x + 4 = 200$, или $5x + 10 = 200$.

147. *Арифметическое решение.* Понятно, что на второй и четвертой полках в сумме в 2 раза больше, чем на третьей (на второй больше на какое-то количество, а на четвертой меньше на это же количество), и эта сумма равна сумме книг на первой и пятой полках. Значит, всего на полках в 5 раз больше книг, чем на средней. На средней полке 40 книг. *Алгебраическое решение.* Пусть на средней полке x книг, а разность в количествах книг на соседних полках равна y. Тогда на полках снизу вверх будет соответственно $x - 2y$, $x - y$, x, $x + y$ и $x + 2y$. Сложив эти числа, получим, что всего на полках $5x$ книг. (Как видите, в алгебраическом варианте «думать» приходится меньше, за вас это делают формулы.)

148. Сложим $16 + 13 + 11 = 40$. При этом мы подсчитали дважды количество блинов, съеденных каждым из членов семьи. (Возможно, бабушка и другие близкие родственники отсутствовали, поскольку трудно представить человека, который не любит блины.) Всего мама испекла 20 блинов (маловато). Сама она съела всего лишь $20 - 16 = 4$ блина (ведь Коля с папой вместе съели 16 штук). Папа съел $20 - 13 = 7$ блинов, а Коля целых 9. *Алгебраическое решение.* Конечно, можно составить систему из трех уравнений с тремя неизвестными, но мы предпочитаем обойтись одним неизвестным. Обозначим через x количество блинов, съеденных мамой. Тогда папа съел $11 - x$ блинов, а Коля съел $13 - x$. А так как Коля с папой вместе съели 16 блинов, получаем уравнение $(11 - x) + (13 - x) = 16$. Откуда $2x = 8$.

149. Можно не думая ввести сразу 5 неизвестных и составлять соотношения согласно условиям задачи. Пусть «думают» за нас уравнения. Но если присмотреться повнимательнее к условию, то увидим, что «главным неизвестным» является первый день. Итак, если в первый день туристы прошли x км, то во второй они прошли $2x$ км, в третий $2x - 7$, в четвертый день $x + 2x = 3x$ и, наконец, в пятый день $x + 2x + 2x - 7 - 70 = 5x - 77$ км. Получаем уравнение $x + 2x + 2x - 7 + 3x + 5x - 77 = 306$, откуда $13x = 390$, $x = 30$. В третий день туристы прошли 53 км.

150. а) Эта задача, по существу, совпадает с задачей № 148. Правда, сюжет немного другой. И решать ее можно так же, как и задачу № 148. Сделайте это самостоятельно. б) Обозначим через x радиус окружности с центром в точке A. Тогда радиусы окружностей с центрами в точках B и C соответственно равны $x - 16$ и $x - 13$. Получаем уравнение $x - 16 + x - 13 = 11$. Откуда $x = 20$. А два других радиуса равны соответственно 4 и 7.

151. Из равенства $\frac{AM}{MD} = \frac{BM}{MC}$ следует, что $\frac{AM}{AD} = \frac{BM}{BC}$. Пусть $BM = x$. Получаем равенство $\frac{1+x}{6} = \frac{x}{2}$. Откуда $x = \frac{1}{2}$, $\frac{BM}{MC} = \frac{1}{3}$.

152. Рис. 18, *а*. 1) Пусть окружность с центром в A имеет радиус x. Тогда окружности с центрами B и D имеют соответственно радиусы $3 - x$ и $3 - x$. Следовательно, окружность с центром в C с одной стороны (со стороны B) должна иметь радиус $5 - (3 - x) = 2 + x$, а с другой — ее радиус равен $4 - (3 - x) = 1 + x$. Значит, в этом случае такое расположение окружностей невозможно.

2) Так же как и в первом случае, обозначив радиус окружности с центром в A, получим, что радиус окружности с центром в C будет с одной стороны $1 + x$, а с другой... также $1 + x$. При этом при любом значении x больше 0 и меньше 3 мы будем иметь решение (сможем найти радиусы всех окружностей). *Замечание.* Ситуация, изображенная на рис. 18, *а*, возможна лишь при условии равенства $AB + DC = AD + BC$.

Рассмотрим рис. 18, *б*. 1) Пусть радиус окружности с центром в точке A равен x. Будем выражать через x последовательно радиусы окружностей с центрами в B, C, D и E: $5 - x$, $6 - (5 - x) = 1 + x$, $4 - (1 + x) = 3 - x$, $5 - (3 - x) = 2 + x$. Но сумма радиусов окружностей с центрами в A и E равна $AE = 3$. Значит, $x + (2 + x) = 3$, $x = \frac{1}{2}$. Находим радиусы оставшихся четырех окружностей.

2) В этом случае, обозначив радиус окружности с центром в A и обходя пятиугольник в том же направлении, найдем радиусы оставшихся четырех окружностей: $5 - x$, $2 + x$, $2 - x$, $3 + x$. И из уравнения $x + (3 + x) = 3$ найдем $x = 0$. Но по смыслу задачи x положителен. Значит, этот случай невозможен.

3) $x = 3$.

153. Обозначим расстояние между городами через S. Тогда время на всю дорогу — туда и обратно — равно $\frac{S}{80}+\frac{S}{120}=\frac{200S}{80\cdot120}=\frac{2S}{96}$. И теперь, чтобы найти среднюю скорость, следует разделить путь ($2S$) на время. Получим 96 км/ч.

154. 4 км/ч.

155. Поскольку пешеход прошел путь туда и обратно, общая длина подъемов равна общей длине спусков. Из предыдущей задачи следует, что средняя скорость на подъемах и спусках равна 4 км/ч, то есть равна скорости на ровном участке. Итак, средняя скорость на всем пути равна 4 км/ч, а на весь путь пешеход затратил 12 : 4 = 3 ч.

156. Пусть стрелка в начале указывала на отметку x. Значит, портфель Гоши весит $2{,}5 - x$ кг, а портфель Димы соответственно $3 - x$ кг. Вместе они весят $5{,}5 - 2x$ кг. С другой стороны, их общий вес $6 - x$ кг. Из уравнения $5{,}5 - 2x = 6 - x$ находим $x = -0{,}5$ кг. (То есть стрелка не доходила до нулевой отметки на 0,5 кг, что не очень обычно для магазинных весов.) Портфели же весили соответственно 3 кг и 3,5 кг.

157. Самое простое здесь — составить систему уравнений. Обозначим через x и y соответственно число Змеев каждого вида. Получаем, что (приравниваем число голов) $3x + 5y = 98$ и (приравниваем число хвостов) $7x + 4y = 129$, число голов равно. Получаем, как принято говорить, систему из двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} 3x + 5y = 98 \\ 7x + 4y = 129. \end{cases}$$

Именно так обычно записывают систему из двух уравнений с двумя неизвестными. Решать подобные системы можно разными способами. Укажем на два наиболее распространенных. (Хотя, честно говоря, похоже, что других способов и нет.) Оба способа являются «способами исключения неизвестных». *Первый способ.* Рассмотрим первое уравнение как уравнение с неизвестным x и найдем этот самый x, то есть выразим x через y. Получим $x=\frac{(98-5y)}{3}$. Заменим во втором уравнении x найденным выражением (попробуйте самостоятельно закончить это решение). *Второй способ.* Умножим первое уравнение на 7, а второе на 3. (Зачем? А чтобы сделать равными коэффициенты при x.) Получим: $21x + 35y = 686$, $21x + 12y = 387$. Теперь вычтем одно уравнение из другого (лучше второе из первого), получим $23y = 299$. Откуда $y = 13$. Затем из любого уравнения найдем $x = 11$. В данном случае второй способ выглядит более привлекательным, поскольку нам не приходится иметь дело с дробями.

158. Обозначив общий вес шоколадных и фруктовых наборов соответственно через x и y (в кг), получим систему

$$\begin{cases} y - x = 8{,}5 \\ 8y - 15x = 20{,}4. \end{cases}$$

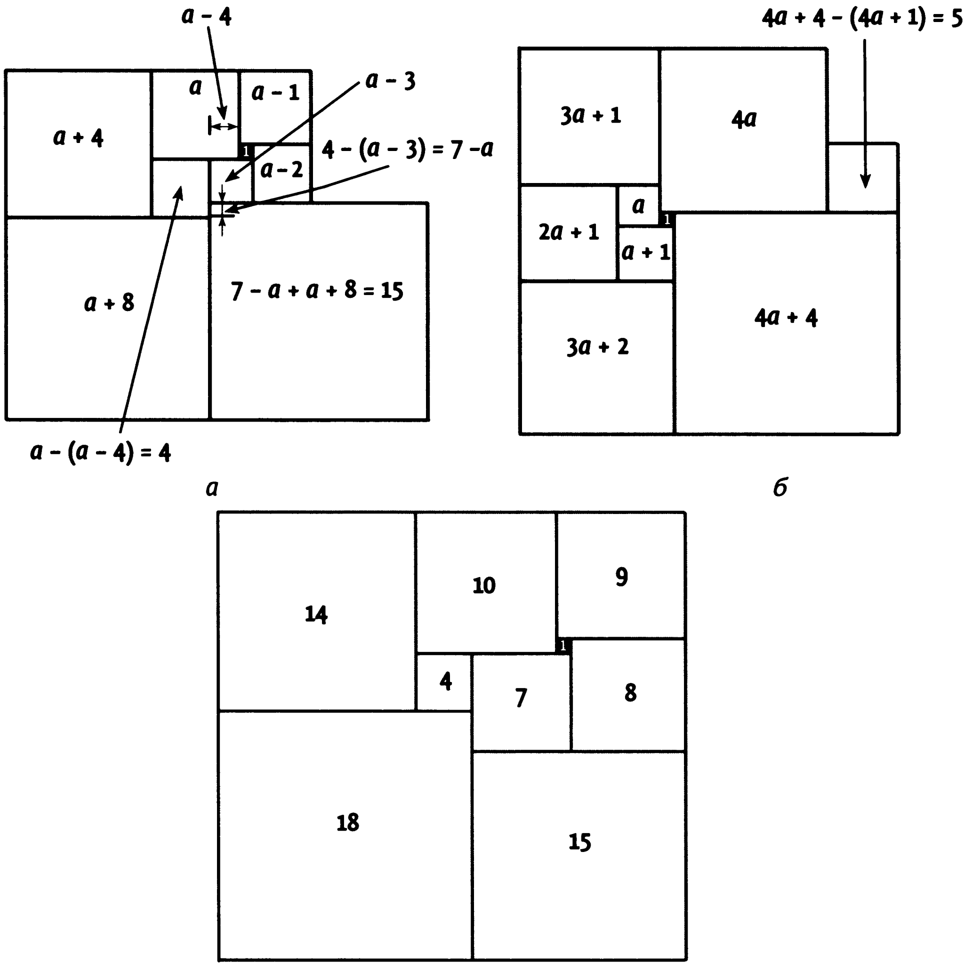
Решая ее любым из известных нам способов, найдем $x = 6{,}8$; $y = 15{,}3$ (или в граммах $x = 6800$, $y = 15\,300$). Но $6800 = 17 \cdot 400$, а $15\,300 = 17 \cdot 900$. Значит, в старшей группе 17 детей, вес одного набора шоколадных конфет равен 400 г, а фруктовых — 900 г.

159. Заметим, что в каждый набор входит ровно 7 фломастеров. Общее число фломастеров равно $77 + 147 = 224$. Следовательно, общее число наборов — 32. При желании теперь нетрудно найти, сколько было наборов каждого вида. Если бы в каждом наборе было бы по 2 черных фломастера, то общее число черных фломастеров было бы 64. Следовательно, лишние $77 - 64 = 13$ фломастеров — это фломастеры из наборов первого типа. То есть наборов первого типа было 13, а второго — 19.

160. Ответ на первую шуточную задачу хорошо известен. Остались 2 потушенные свечи, так как остальные сгорели. Примем длину каждой свечи за 1. Пусть свечи были потушены через x часов после того, как их зажгли. Поскольку за 1 час сгорает $\frac{1}{5}$ длины первой свечи, то за x часов сгорел кусок длиной $\frac{x}{5}$. Осталось $1-\frac{x}{5}$. Соответственно, от второй останется кусок длиной $1-\frac{x}{4}$. Согласно условию, $1-\frac{x}{5}=4\left(1-\frac{x}{4}\right)$. Из этого уравнения находим $x = \frac{15}{4}$ (ч), что составляет 3 ч 45 м. Свечи были погашены в 11 часов 45 минут вечера.

161. В этой задаче уравнения ни к чему. Поскольку машина прибыла в банк на 20 минут раньше обычного времени, то она встретила банкира в тот момент, когда ей оставалось ехать до виллы $20 : 2 = 10$ минут. К этому моменту прогулка банкира продолжалась уже 50 минут.

162. Рассказ барона не может быть правдивым. В данной задаче вместо уравнений придется использовать алгебраические неравенства. Обозначим пройденный путь через S, а время на весь



в

Рис. 72

путь через t. По условию задачи барон $\frac{7}{15}t$ шел со скоростью 6 км/ч. Таким образом со скоростью 5 км/ч он шел не более $\frac{8}{15}t$. Так как со скоростью 5 км/ч барон прошел половину пути, то $\frac{8}{15}t \cdot 5 \geq \frac{S}{2}$. $(\frac{40t}{15} > \frac{S}{2})$.

Посчитаем, сколько прошел барон, идя со скоростью 5 и 6 км/ч суммарно: $\frac{S}{2} + \frac{7}{15}t \cdot 6 = \frac{S}{2} + \frac{42t}{15} > \frac{S}{2} + \frac{40t}{15} > \frac{S}{2} + \frac{S}{2} = S$, то есть больше, чем весь путь.

163. а) См. рис. 72, *а*, *б*.

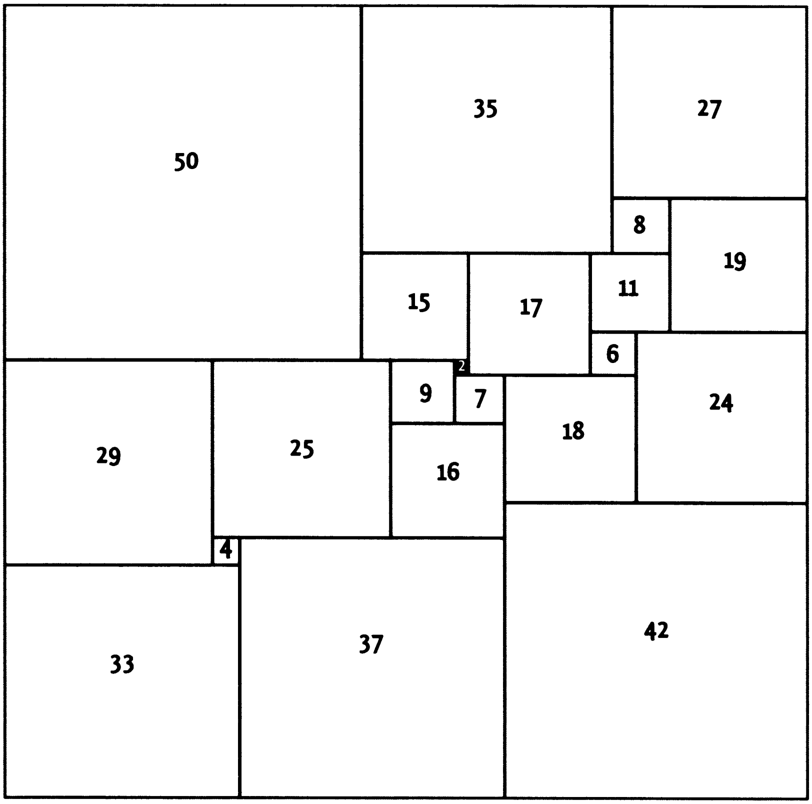


Рис. 73

б) Если для рис. 72, *а* взять значение стороны квадрата а =10, то рисунок станет следующим (см. рис. 72, *в*).

164. См. рис. 73.

165. Задача решена в основном тексте.

166. 360°, 540°, 180° · 2002.

167. Рис. 24, *а*. 58° + 36° = 94°.
Рис. 24, *б*. 28°.
Рис. 24, *в*. 64°.

168. Из рис. 74 «видим», что для двух первых «звездочек» сумма углов равна 180°, а для третьей эта сумма равна 540°.

169. В случае, изображенном на рис. 75, угол ACB равен 50°. Как это обосновать? Обозначим углы AOC и BOC соответственно $2x$ и $2y$, $2x + 2y = 360° - 100° = 260°$. Значит, $x + y = 130°$. Поскольку треугольник AOC равнобедренный, $\angle OCA = 90° - x$. Так же

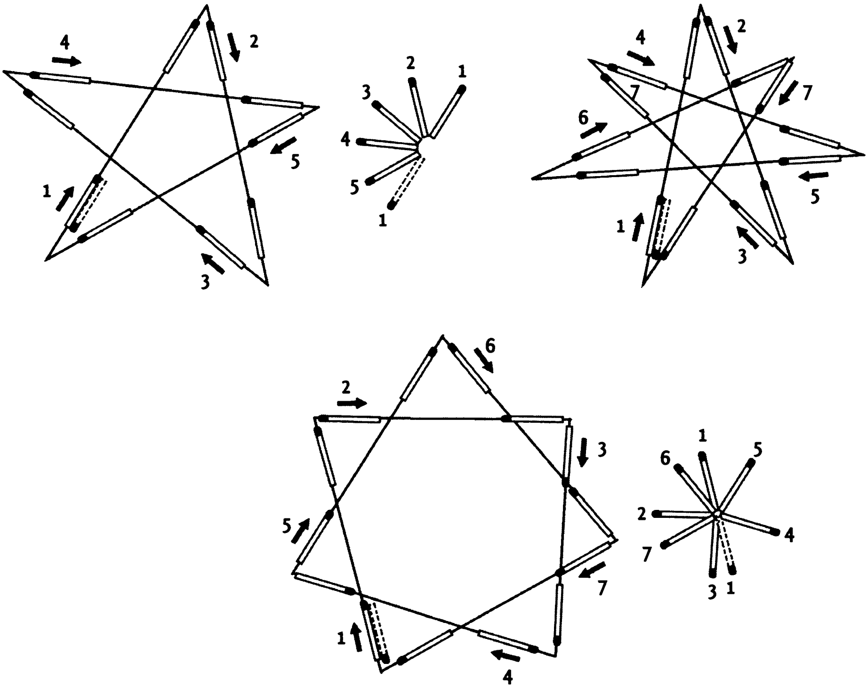


Рис. 74

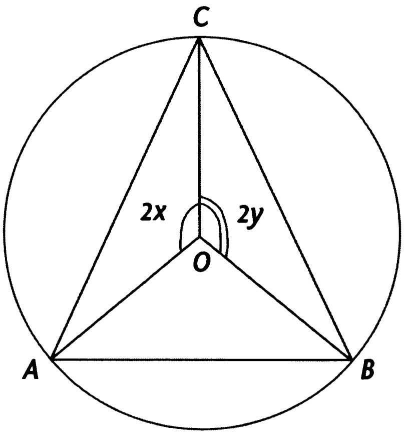


Рис. 75

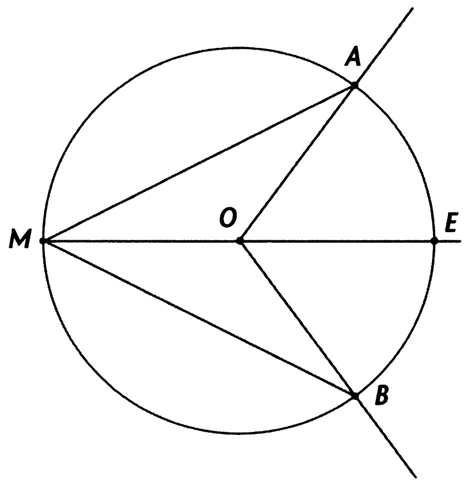


Рис. 76

найдем, что $\angle OCB = 90^\circ - y$. Значит, $\angle ACB = 90^\circ - x + 90^\circ - y = 180^\circ - 130^\circ = 50^\circ$. Разберите самостоятельно другие случаи расположения точки C. Общий ответ выглядит следующим образом: если радиус OC не пересекает AB, этот угол равен 50°. Если пересекает, он равен 130°.

170. Это сразу следует из того, что сумма углов треугольника равна 180°.

171. Можно повторить рассуждение задачи № 169. А можно немного упростить и воспользоваться утверждением задачи № 170. Продолжим прямую MO до пересечения с окружностью в точке E (рис. 76). Из того, что треугольник AOM равнобедренный, получаем $\angle AOE = 2\angle AMO$. Точно так же $\angle BOE = 2\angle BMO$. Значит, $\angle AOB = 2\angle AMB$.

172. Точка M описывает окружность (рис. 29). При этом, пока $\angle AMB$ принимает одно значение (отрезок AB находится внутри одного угла, определяемого заданными прямыми), точка M описывает одну дугу этой окружности с концами в A и B, а при другом значении этого угла M описывает другую дугу той же окружности.

173. Эту нетрудную задачу каждый решит самостоятельно. Изучите также решение задачи № 174.

174. Построим произвольную окружность с центром в вершине угла. Пусть эта окружность пересекает стороны угла в точках A и B. Тогда для любой точки M этой окружности, расположенной вне данного угла, угол AMB будет в 2 раза меньше данного (рис. 76, см. задачу № 171).

175. Первая задача очень проста (рис. 77, *а*). Вторую задачу можно решить разными способами. Приведем изящное решение, найденное знаменитым персидским астрономом Абул-Вефом, жившем в X веке в Багдаде. Два квадрата разрежем на четыре равные части (каждый на две), приложим эти части к третьему квадрату, как на рис. 77, *б*. Затем проведем пунктирные линии, образующие искомый квадрат, и переложим маленькие кусочки. В результате получим, что три квадрата разрезали на шесть частей, из которых составляется один квадрат. Неизвестно, можно ли разрезать три квадрата меньше чем на шесть частей для решения поставленной задачи. (Указанный способ дает возможность превратить в квадрат три квадрата, среди которых два равных, а сторона третьего не больше диагонали каждого из равных.) Покажем еще один старинный способ решения задачи: разрежьте два квадрата на части, из которых можно составить

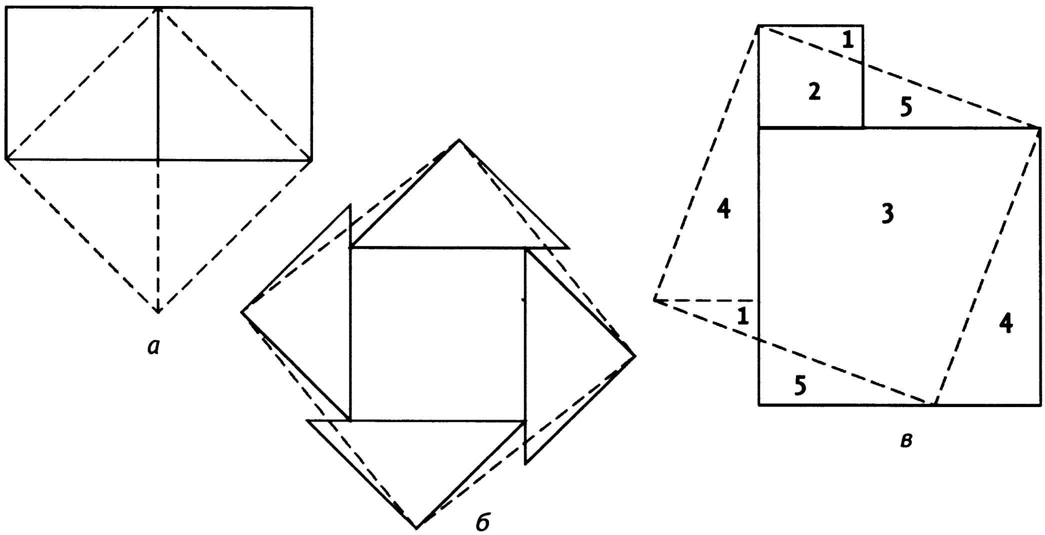


Рис. 77

один квадрат (рис. 77, *в*). Этим способом можно последовательно перекроить в один любое число имеющихся квадратов.

176. При решении будем пользоваться свойством равнобедренного треугольника и утверждением задачи № 170. Пусть $\angle ACB = \angle DOC = x$, тогда $\angle ADO = \angle DAO = 2x$, $\angle BOA = \angle DAO + \angle ACO = 3x$, что и требовалось.

177. а) Закончим приведенное в основном тексте решение. Итак, $\angle C_1CB = \angle HCB = \angle HAB = \angle A_1AB$. Получается, что в треугольниках BCC_1 и BAA_1 есть по паре равных углов (один угол общий). Значит, у них равны все три угла и $\angle CC_1B = \angle AA_1B = 90°$. Что и требовалось.

178. Таких четверок ровно шесть:

A, B_1, A_1, B;

B, C_1, B_1, C;

C, A_1, C_1, A;

A, B_1, H, C_1;

B, C_1, H, A_1 и

C, A_1, H, B_1.

Попробуйте сделать большой чертеж и изобразить на нем все шесть окружностей.

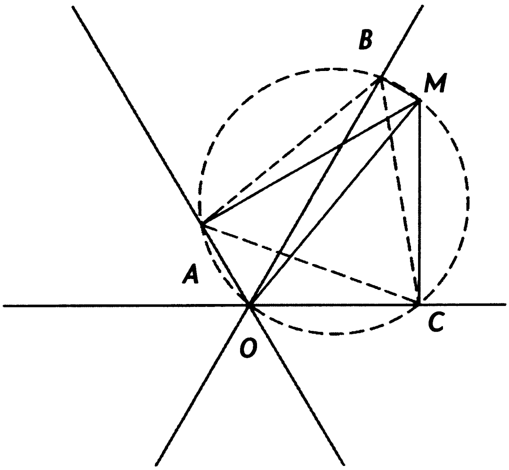


Рис. 78

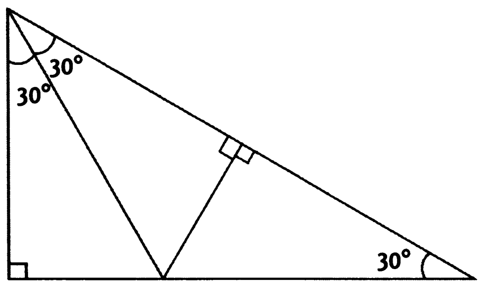


Рис. 79

179. Заметим, что все пять точек: O, M, A, B, C – расположены на одной окружности. OM – диаметр этой окружности (рис. 78). Значит, $\angle BAC = \angle BOC = 60°$. Такими же будут и другие углы треугольника ABC. Этот треугольник – равносторонний, его также называют *правильным*.

180. Прямоугольный треугольник с острыми углами в 30° и 60° можно разрезать на три равных треугольника такого же вида (рис. 79).

181. В этой задаче самое главное – сделать правильный чертеж. Но сначала вспомним, что величина угла, вершина которого (точка M) расположена на окружности, а стороны пересекают окружность в точках A и B так, что дуга AB полностью расположена внутри угла, определяется величиной дуги. Поэтому каждой дуге можно приписать значение, равное величине соответствующего ей угла. А теперь займемся нашей задачей. Возьмем окружность и точки A, B и C на ней, стараясь при этом, чтобы выполнялись (хотя бы примерно) условия задачи (рис. 80). У соответствующих дуг мы должны поставить значения 28°, 72° и 80°. Теперь отметим точку A_1 в соответствии с условием. Точка A_1 разделит дугу BC на две, которым соответствуют 28° и 44°. Теперь отмечаем точку B_1, а затем и C_1. Получившаяся картинка позволяет ответить на вопрос задачи. Угол $A_1B_1C_1$ равен 26°, угол $A_1C_1B_1$ равен 64°, а угол $B_1A_1C_1$ равен 90°. Попробуйте самосто-

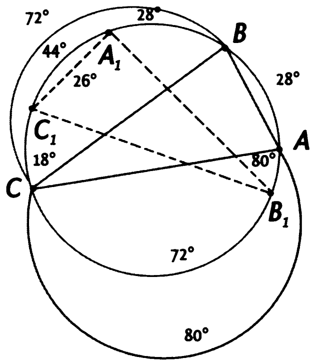


Рис. 80

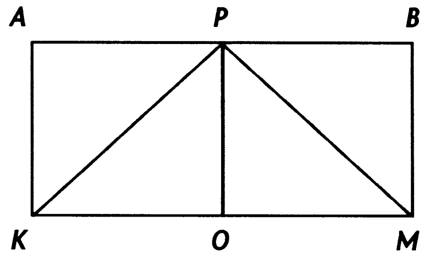


Рис. 81

ятельно решить несколько подобных задач, рассматривая треугольники ABC с другими углами.

182. Пусть маршрут из A в B последовательно пересекает отрезки PK, PO и PM. «Развернем» этот маршрут на плоскость, для чего последовательно выложим на плоскость треугольники APK, KPO, OPM и MPB (рис. 81). Отрезки AP и PB при этом образуют отрезок прямой. Значит, длина маршрута из A в B не может быть меньше длины ломаной APB. Это и есть кратчайший путь.

183. Можно по-разному обосновывать то, что кратчайший путь от точки к прямой есть путь по перпендикуляру. Можно, например, воспользоваться известной и доказываемой позднее в этой главе теоремой Пифагора.

184. Соединим точку A с центром (точка O) окружности (рис. 82). Искомой точкой B является точка пересечения отрезка AO с окружностью. Это совсем очевидно. Если мы возьмем любую точку C на окружности, то длина ломаной ACO будет больше длины отрезка AO, а значит (вычитаем равные отрезки OC и OB), отрезок AC больше AB.

185. См. рис. 83.

186. Задача решена в тексте.

187. Задача решена в тексте.

188. Пусть точки A и B расположены, как показано на рис. 84. Естественно, что точки K и M следует выбрать на указанных на рисунке сторонах. Воспользуемся методом симметрии. Построим точку A_1, симметричную A относительно стороны, содержащей

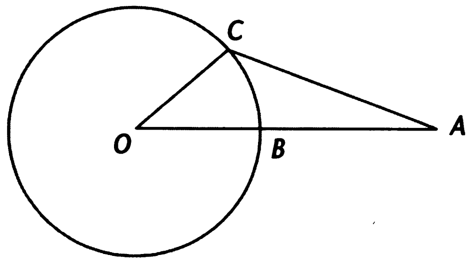


Рис. 82

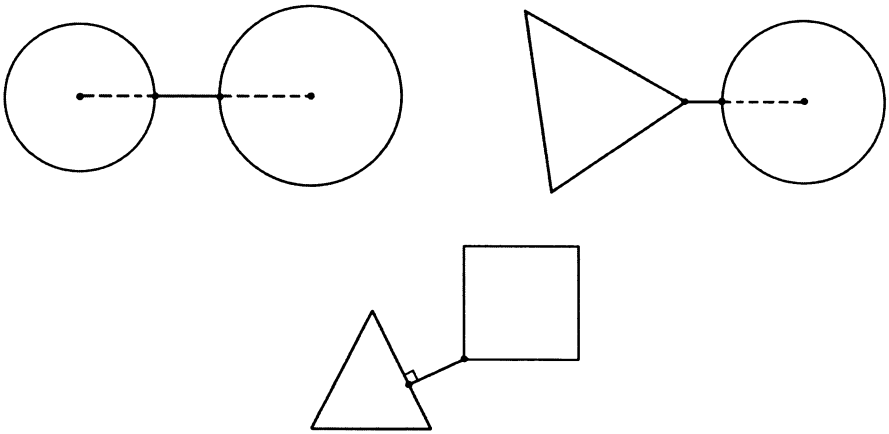


Рис. 83

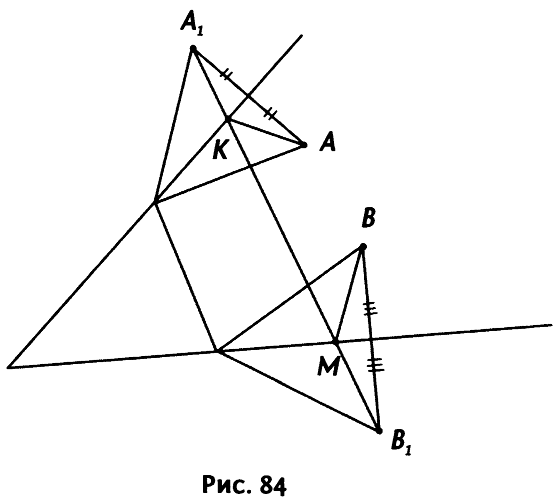


Рис. 84

точку K, и точку B_1, симметричную B относительно другой стороны. Понятно, что длина отрезка A_1B_1 равна длине ломаной $AKMB$ (ведь $A_1K = AK$, $B_1M = BM$). И если отрезок A_1B_1 пересекает стороны угла, то эти точки пересечения и следует выбрать в качестве точек K и M. В противном случае точки K и M следует взять совпадающими с вершиной угла.

189. Простыми преобразованиями проверяем справедливость равенства $(m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2 = (m^2+n^2)^2$.

190. Нам надо оценить величину $\sqrt{50^2+1}-50$. Умножим и разделим рассматриваемую величину на сумму $\sqrt{50^2+1}+50$. Из известной формулы $((a+b)(a-b) = a^2 - b^2)$ следует, что $(\sqrt{50^2+1}-50)(\sqrt{50^2+1}+50) = (\sqrt{50^2+1})(\sqrt{50^2+1}) - 50\cdot 50 = 50^2+1-50^2 = 1.$

Таким образом, $(\sqrt{50^2+1}-50) = \dfrac{1}{\sqrt{50^2+1}+50}$, а эта дробь очевидно меньше 0,01. Итак, выигрыш меньше 0,01 м. Эту величину следует считать достаточно маленькой по сравнению с 50 м.

191. Рассмотрим путь, пересекающий последовательно AA_1, AD, BC и CC_1. Сделаем нужную развертку (рис. 41, *в*). Отрезок PM является гипотенузой в прямоугольном треугольнике с катетами 16 и 12 м. Длина PM равна $\sqrt{12^2+16^2} = 20$ м. Это и будет самый короткий путь от паука к мухе.

192. Рассмотрим рис. 42. Треугольник $MДЕ$ — прямоугольный и имеет такую же форму, что и треугольник $АВБ$. Больший катет в треугольнике $АВБ$ равен $ВБ = 4$ км, а больший катет в треугольнике $MДЕ$ есть $ДЕ = 3$ км. Значит, чтобы получить стороны треугольника $MДЕ$, надо соответствующие стороны треугольника $АВБ$ умножить на $\dfrac{3}{4}$. Получаем, что $ME = \dfrac{9}{4}$ км, $MД = \dfrac{15}{4}$ км. Значит, $AM = 6 - \dfrac{9}{4} = \dfrac{15}{4}$ км. Время, за которое мальчик может добраться до дома по маршруту $AMД$, равно $\dfrac{15}{4\cdot 5} + \dfrac{15}{4\cdot 3}$ ч = 2 ч. Это и есть наименьшее время.

193. Давайте вернемся к предыдущей задаче и внимательно изучим ее решение. Пусть скорости по шоссе и по полю равны соответственно V и W, причем скорость по шоссе, естественно, больше. Тогда (рис. 42) в прямоугольном треугольнике $АБВ$, в котором катет $БВ$ соответствует точкам, до которых можно дойти за 1 час, гипотенуза $АБ = V$, а катет $АВ = W$. А поскольку треугольник $MДЕ$ имеет такую же форму, что и треугольник $АБВ$, для него

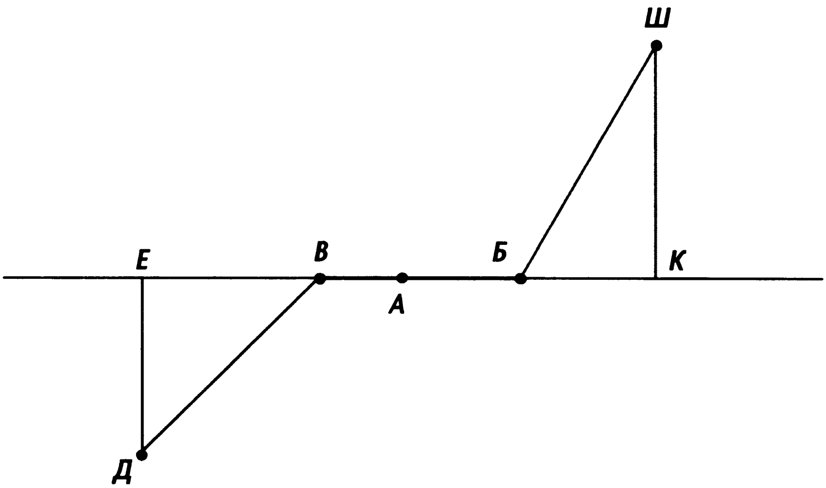


Рис. 85

выполняется равенство $МЕ : МД = W : V$. А теперь перейдем к нашей задаче. Пусть мальчику надо пройти часть пути по шоссе, чтобы скорее добраться от школы до дома (рис. 85). Возьмем какую-нибудь точку $А$, расположенную на участке шоссе, по которому проходит мальчик (между $В$ и $Б$). Рассмотрим две задачи, которые мы уже умеем решать. Как за наименьшее время добраться мальчику от $А$ до $Ш$ и от $А$ до $Д$. В прямоугольном треугольнике $БКШ$ отношение $БК : БШ = 3 : 5$, а катет $ШК = 2$. Пусть $БК = 3x$, $ШБ = 5x$. По теореме Пифагора $(5x)^2 - (3x)^2 = 2^2$. Откуда находим $x = \frac{1}{2}$, $БК = \frac{3}{2}$, $ШБ = \frac{5}{2}$. (Треугольник $БКШ$ имеет форму все того же прямоугольного треугольника со сторонами 3, 4, 5.) Точно так же найдем, что $ЕВ = \frac{4}{3}$, $ДВ = \frac{5}{3}$. Значит, $ВБ = 3 - \frac{3}{2} - \frac{4}{3} = \frac{1}{6}$. А время на этот путь равно $\frac{ДВ}{4} + \frac{ВБ}{5} + \frac{БШ}{3} = \frac{5}{12} + \frac{1}{30} + \frac{5}{6} = \frac{77}{60}$ ч, или 77 минут.

194. Задача решена в тексте.

195. Это сразу следует из свойства равнобедренного треугольника и из того, что сумма углов треугольника равна 180°.

196. Как это следует из решения задачи № 194, все эти отрезки проходят через точку Торричелли. Утверждение задачи остается верным для произвольного треугольника только для случая, когда один угол треугольника больше 120°, надо рассматривать не отрезки AA_1, BB_1 и CC_1, а прямые AA_1, BB_1 и CC_1.

197. Рассмотрим треугольник ABC, вершины которого соответствуют нашим деревням. (Случай, когда деревни расположены на одной прямой, следует рассмотреть отдельно.) Пусть в деревнях A, B и C живут соответственно 30, 40 и 70 семей. Покажем, что если следовать предложению жителей деревни C, то колодец следует вырыть в этой деревне. В самом деле, пусть колодец вырыт в некоторой точке K (рис. 86). Тогда общий путь всех жителей равен $30AK + 40BK + 70CK$. Но $70 = 30 + 40$. (В этом все дело.) Значит, общий путь равен $30AK + 40BK + 70CK = 30AK + 40BK + 30CK + 40CK = 30(AK + CK) + 40(BK + CK)$. Но кратчайшим путем между двумя точками является отрезок прямой. А поскольку точка K не может лежать одновременно и на AC, и на BC, хотя бы одна сумма в скобках больше соответствующей стороны треугольника, и мы окончательно получаем, что $30AK + 40BK + 70CK > 30AC + 40BC$. А именно таким станет общий путь всех жителей, если вырыть колодец в деревне C. Если же деревни расположены на одной прямой, то колодец можно вырыть в любой точке отрезка, соединяющего деревню C с ближайшей к ней деревней.

198. Как известно, бильярдный шар отражается по закону «угол падения равен углу отражения». Можно всякий раз, когда шар ударяется о бортик, отражать не путь шара, а сам бильярд. А путь шара продолжать прямой линией в этом отраженном бильярде (рис. 87, *а*). Поступим так в нашем случае. «Спрямим» путь шарика, отражая угол относительно соответствующей стороны всякий раз, когда путь шарика пересекает эту сторону. Получим последовательность лучей, выходящих из общей вершины, и прямую, пересекающую некоторые из этих лучей (рис. 87, *б*). Число точек пересечения этой прямой с лучами и равно числу отражений шарика от бортов. Понятно, что пере-

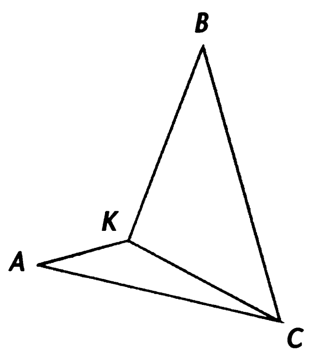


Рис. 86

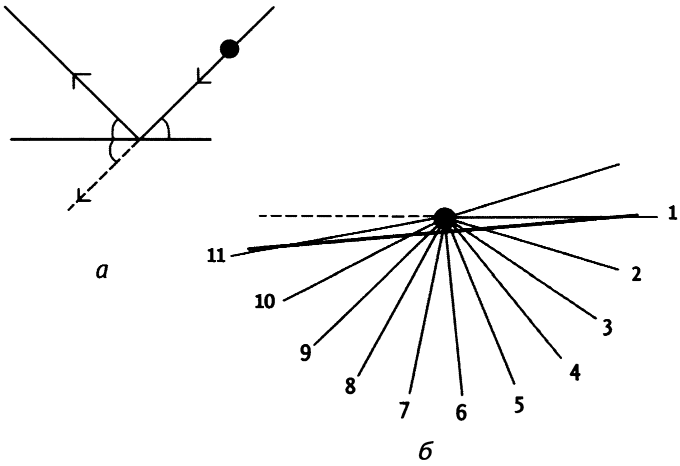


Рис. 87

сечь можно лишь те лучи, которые расположены в одной полуплоскости, на которые делит плоскость, содержащая первый из пересекаемых лучей. Таких лучей будет ровно 11 ($17^\circ \cdot 10 < 180^\circ$, а $17^\circ \cdot 12 > 180^\circ$). Следовательно, шарик может сделать самое большее 11 отражений.

199. Добавив еще три треугольника (рис. 88), увидим, что искомый отрезок равен половине диагонали квадрата со стороной $a + b$ и его длина равна $(a+b)\frac{\sqrt{2}}{2}$.

200. Проведем лучи из центра квадрата, являющегося дном коробки, проходящие через его вершины (рис. 89, a). Они разобьют

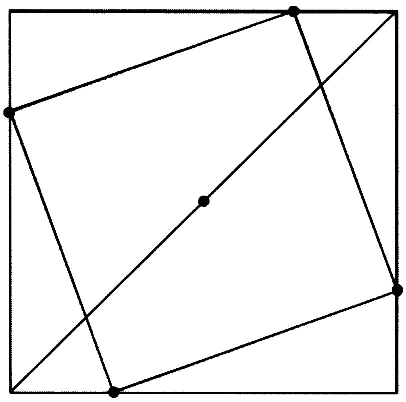


Рис. 88

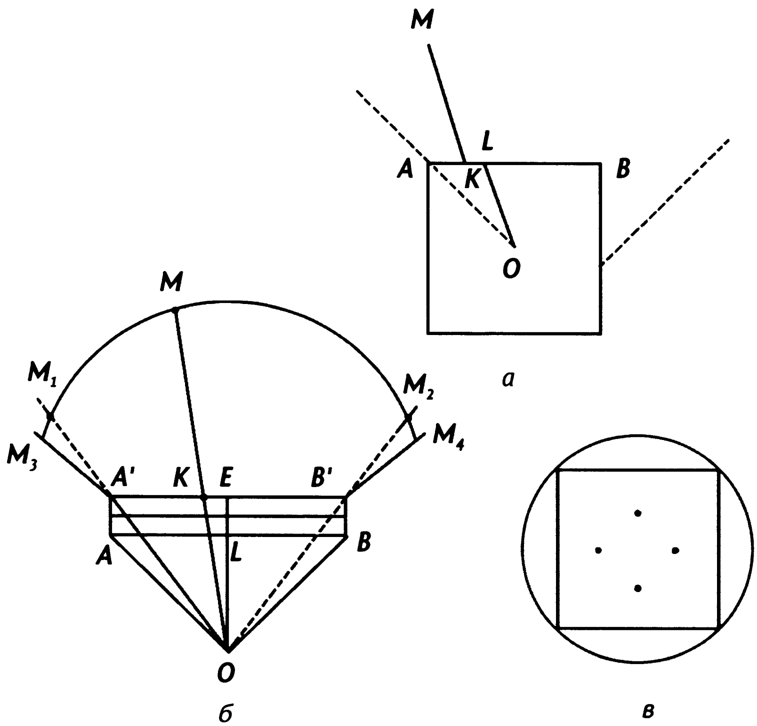


Рис. 89

плоскость на четыре угла. Понятно, что достаточно изобразить нужные точки в одном из этих углов. Понятно также, что если гусеница может доползти от центра квадрата — точки O — до некоторой точки M вне квадрата, то точки K и L, в которых гусеница начинает и заканчивает движение по вертикальной стене коробки, должны принадлежать соответствующей стороне квадрата. (Точка K может совпадать с вершиной квадрата.) Пусть M — одна из интересующих нас точек. Развернем путь гусеницы на плоскость (рис. 89, *б*). На нашем рисунке прямоугольник $ABB'A'$ является «разверткой» вертикальной стенки, соответствующей стороне AB($AB = 60$, $AA' = 10$). Если точка M находится внутри угла $A'OB'$, то самый короткий путь из M в O — это путь по прямой. Если же M вне этого угла, но внутри угла AOB (то есть внутри одного из двух углов $M_3A'M_1$ или же $M_4B'M_2$), то самым коротким путем будет путь из M в ближайшую точку A' или B', а затем в центр — точку O. Но при заданном условии этот случай невозможен, поскольку по теореме Пифагора $OA' = \sqrt{OE^2 + A'E^2} = 50$ см. Следовательно, чтобы добраться до A'

или B', гусенице потребуется 1 минута. А все точки заполняют четыре дуги окружностей с радиусами 50, центры которых находятся в указанных на рисунке (рис. 89, *в*) точках.

201. Треугольные пирамиды называются тетраэдрами. Эту удивительно творческую задачу предлагаем решить самостоятельно или в компании друзей.

СОДЕРЖАНИЕ